إذا كانت $D = (x ، y)$ نقطة على الدائرة، يكون معنا:

$$\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+(y-h)^2=\frac{d^2}{4}+h^2$$

أي أنّ: $x(x-d)+y(y-2h)=0$.

ولكن: $BD^2= ED^2 + BE^2 = x(d-x) + y^2$ وَ $CD^2 = x^2 + y^2$ ، فيُكتَب شرط المسألة على الشكل التالي:

$y(y-2h) + y^2 > k^2\,(dx + 2hy)$ ، أي أنَّ $k^2dx < 2y^2 - 2hy - 2k^2hy$ وهذا ما يفرض أن تكون النقطة D خارج القطع المكافئ ذي المعادلة:

$$k^2dx = 2y^2 - 2h(1 + k^2)y ،$$

والمحور: $y = \frac{h}{2}\,(k^2 + 1)$ ،

والرأس الذي له الإحداثيتان: $\left(-\frac{(1+k^2)^2h^2}{2k^2d},\ \frac{h}{2}(k^2+1)\right)$.

النقطة C، التي هي أصل الإحداثيات، توجد على القطع المكافئ، في حين أنَّ النقطة $A = (d\ ,\ 0)$ هي في داخله : إنَّ الخطَّ ذا المعادلة $y = 0$ يقطع بالفعل القطع المكافئ على النقطة C ، على يسار النقطة A. ويقطع القطعُ المكافئ قوسَ الدائرة ADC على نقطة وحيدة D_0، ويجب أن تكون النقطة D المطلوبة على القوس $\widehat{CD_0}$. وتُحدَّد D_0 بمعادلة من الدرجة الثالثة[٧].

لنأخذ هذه المسألة نفسها، مع الافتراض بأن الزاوية $\widehat{DEC}$ حادّة.

لتكن D النقطة التي نحصل عليها كما فعلنا في الحالة السابقة، ونرفق بها النقطتين S وَ O بحيث يكون $DS \perp AC$ وَ $OS \perp AC$ ، فيكون معنا إذاً: $k < \frac{DO}{DC}$.

---

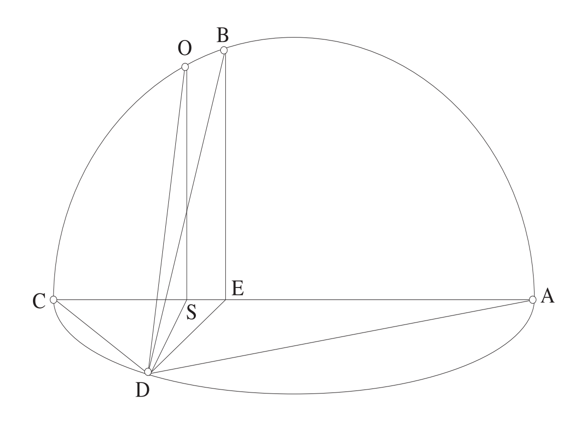
[٧] $x_0\,(x_0 - d) = y_0\,(y_0 - 2h)$ وَ $k^2d \cdot x_0 = 2y_0\,[y_0 - (1 + k^2)h]$، فنستنتج أنَّ:

$$\frac{x_0-d}{k^2d}=\frac{2h-y_0}{2(y_0-(1+k^2)h)}$$ وَ $$x_0=d\frac{y_0(2-k^2)-2h}{2(y_0-h(1+k^2))}؛$$

ويكون معنا بعد ذلك:

$$4y_0\,(y_0 - h(1+k^2))^2 = k^2d^2\,(y_0\,(2 - k^2) - 2h).$$


j4know
فقط للعلم
مكتبة



الشكل ٢٣-٢

لتكن النقطة E على $[CA]$ بحيث تكون $\widehat{CED}$ حادَّة (لدينا $\widehat{CSD} < \widehat{CED}$ فيكون $CE > CS$)؛

ولتكن B على نصف الدائرة المعلومة بحيث يكون $EB \perp AC$.

نريد أنْ نبرهن أنَّ: $\frac{BD}{DC} > k$.

شرح:

لنضع $x_0 = \overline{CS}$ ، $x = \overline{CE}$ ، $d = \overline{CA}$ وَ $a = \overline{SD}$ مع $x_0 < \frac{d}{2}$ وَ $d > x > x_0$. فيكون

معنا إذاً:

$$a^2 + dx_0 - x_0^2 = x_0 (d - x_0) + a^2 = OS^2 + SD^2 = OD^2 \qquad (١)$$

$$BE^2 = x(d - x) \text{ ، } a^2 + (x - x_0)^2 = DS^2 + SE^2 = DE^2$$

$$a^2 + (x - x_0)^2 + x(d - x) = DE^2 + BE^2 = BD^2$$

$$. a^2 + dx - x_0 (2x - x_0) = BD^2 \qquad (٢)$$

ونحصل من (١) وَ (٢) على:

$$.0 < (d - 2x_0)(x - x_0) \quad \Leftrightarrow 0 < d(x - x_0) - 2x_0 (x - x_0) \Leftrightarrow BD^2 > OD^2$$

وهذه المتباينة مُحقَّقة لأنَّ $x_0 < x$ وَ $2x_0 < d$. فيكون معنا إذاً: $OD < BD$ ، فنحصل

على النتيجة: $\frac{BD}{CD} > k$.

ملاحظة: يكون معنا أيضاً: $BD < AD$ ، لأنـَّه يُمكن أن نكتب:

$$a^2 + x_0^2 + d(d - 2x_0) = a^2 + (d - x_0)^2 = AD^2 \text{ ،}$$

$$a^2 + x_0^2 + x(d - 2x_0) = BD^2 \text{ ، } d - 2x_0 > 0 \text{ ،}$$

ويكون معنا: $d > x$. فإذاً، عندما ترسم E $[SA]$، تتزايد x من x_0 إلى d ، وترسم B القوس OA ويتزايد الطول BD ، فيكون معنا $AD > BD > OD$.

أخذ ابن الهيثم، بعد ذلك، أقواساً مبنيّة على OD أو على BD ، مفترِضاً أنَّ كلَّ قوس من هذه الأقواس هي جزء من دائرة مساوية لدائرة ADC ؛ وهذا يرجع أيضاً إلى أخذ الدائرة ADC وإلى وضع وترين $O'D$ وَ $B'D$ بحيث يكون $DO = O'D$ وَ $DB = B' D$. فيكون معنا عندئذ: $DA > DB' > O'D > DC$ ، فنستنتج أنَّ:

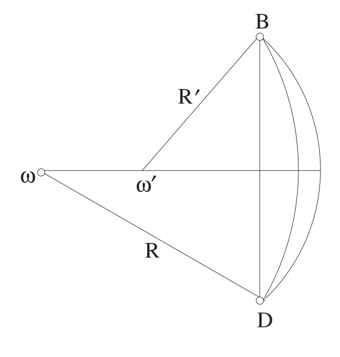
$$\widehat{DC} < \widehat{DO'} < \widehat{DB'} < \widehat{DA}$$

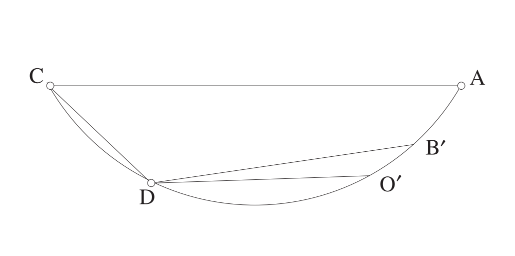
وَ $\widehat{DO'} + \widehat{DC} > \widehat{DA} + \widehat{DC} >$ نصف دائرة، وكذلك أيضاً: $\widehat{DB'} + \widehat{DC} >$ نصف دائرة.

فنستنتج وفقاً للقضية الأولى أنَّ:

$$k < \frac{DO'}{DC} < \frac{\widehat{DO'}}{\widehat{DC}} \text{ وَ } k < \frac{DB'}{DC} < \frac{\widehat{DB'}}{\widehat{DC}} .$$

والنتيجة هي نفسها إذا أخذنا القوسين $\widehat{DO}$ أو $\widehat{DB}$ من دائرة أصغر من الدائرة ADC.





الشكل ٢٤

لتكن معنا إذاً قوسُ $\widehat{DB}$ ودائرتان هما (ω, R) وَ (ω', R')، تَمُرّان بالنقطتين B وَ D مع $R > R'$. والقوس $\widehat{DB}$ من الدائرة (ω') هي خارج الدائرة (ω)، فطولها إذاً أكبر من طول القوس $\widehat{DB}$ من الدائرة (ω). فيكون معنا إذاً: $k < \frac{DB}{DC} < \frac{\widehat{DB}}{\widehat{DC}}$.

ملاحظة: إنَّ محور الدائرة ABC، في هذه القضية ١٠، هو المنصِّف العمودي للخط AC في المستوي ADC. ومركز الدائرة ADC هو على هذا المُنَصِّف، فهو إذاً مركز كرة توجَد

عليها الدائرتان ABC وَ ADC. والخاصِّيّة المُثبَتة في القضية ١٠ ستُستَخدَم عدة مرات في قسم الفلك من مؤلَّف ابن الهيثم (انظر ص. ٤١٧، ٤٣١).

القضيتان ١١ وَ ١٢: نأخذ بعين الاعتبار، في هاتين القضيتين، خاصِّيّةَ نقاط دائرة من دوائر العرض على الكرة السماوية. لتكن ABC دائرة نصف النهار، ولتكن A وَ C القطبين السماويين، ولتكن DNE دائرة موازية للأفق ذات قطر DE.

القضية ١١- نفترض أنَّ A وَ C على الأفق (المكان المعني بالأمر هو في هذه الحالة نقطة على دائرة الاستواء الأرضية). تقطع دائرة معدّل النهار، ذاتُ المركز G، دائرةَ نصف النهار على النقطة B، وَيقطع الخطُّ BG الخطَّ DE على النقطة O. لنأخذ ثلاث دوائر موازية لدائرة معدّل النهار تكون مراكزها F، S وَ Q، وتقطع على التوالي دائرة نصف النهار على النقاط H، I وَ K ، كما تقطعُ الدائرةَ الأفقيةَ DNE على النقاط L، M وَ P ؛ ومُستوِياتُها تقطع الخط DE على النقاط X، J وَ U. ونفترض أنَّ:

$DX < DJ < DO < DU < DE$ ، فيكون معنا عندئذ: $\frac{LH}{HD} > \frac{MI}{ID} > \frac{NB}{BD} > \frac{PK}{KD}$.

إنَّ مُستويَ دائرة نصف النهار (CBA)عموديٌّ على مستوي دائرة معدّل النهار وعلى مستويات الدوائر الموازية لمعدّل النهار. تسمح المتباينتان $DX < DJ < DO$ بالحصول على $OJ < OX$ ، فنحصل على $MJ > LX$ ، لأنَّ $OD^2 - OX^2 = LO^2 - OX^2 = LX^2$، ولأنَّ $OD^2 - OJ^2 = MO^2 - OJ^2 = MJ^2$.

ويكون من جهة أخرى: $SJ = QX$ وَ $\widehat{QXL} = \widehat{SJM} =$ زاوية قائمة، فيكون إذاً $\widehat{XQL} > \widehat{JSM}$. ويكون معنا أيضاً $\widehat{OGN} > \widehat{JSM}$. ويكون معنا $\widehat{XQL} = 2\widehat{HLX}$ ، لأنَّ $\widehat{XQL}$، في الدائرة ذات المركز Q ، هي زاوية مركزية موتِّرة للقوس $\widehat{HL}$، وَ $\widehat{HLX}$ هي زاوية محاطة توتِّر قوساً مساوية للقوس $\widehat{HL}$ (إنّها قوس متناظرة مع القوس $\widehat{HL}$ بالنسبة إلى الخط QX). ويكون معنا أيضاً $2\widehat{IMJ} = \widehat{JSM}$ وَ $2\widehat{ONB} = \widehat{OGN}$، فنستنتج أنَّ:

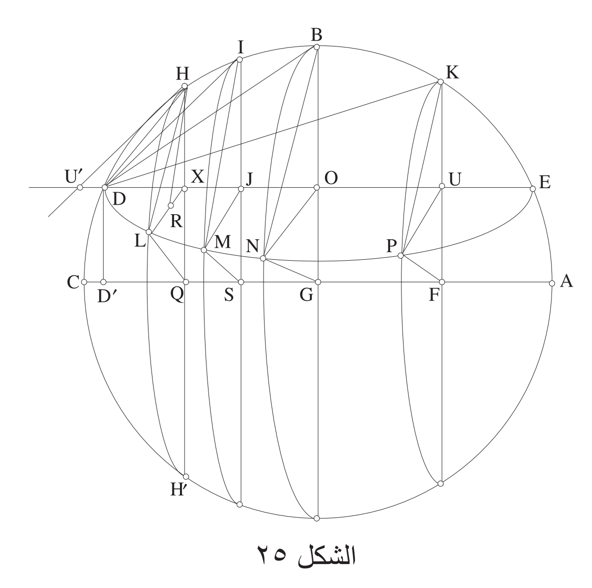
$$\widehat{HLX} < \widehat{IMJ} < \widehat{ONB} ،$$

وبالتالي يكون: $\widehat{NBO} < \widehat{MIJ} < \widehat{LHX}$.

لتكن النقطة R على الخط LX بحيث يكون $\widehat{MIJ} = \widehat{XHR}$ ؛ المثلثان HXR وَ IJM هما قائما الزاوية ومتشابهان، فيكون معنا إذاً: $\frac{RH}{HX} = \frac{MI}{IJ}$.

ولكن $HR < HL$ فيكون إذاً: $\frac{HL}{HX} > \frac{MI}{IJ}$.

ويُبرهَن بنفس الطريقة أنَّ: $\frac{MI}{IJ} > \frac{NB}{BO}$.



الشكل ٢٥

إنَّ لدينا $\widehat{BDO} < \widehat{IDJ} < \widehat{HDX}$ وبالتالي يكون: $\widehat{DBO} > \widehat{DIJ} > \widehat{DHX}$. لتكن النقطة U' على الخط DX بحيث يكون: $\widehat{DIJ} = \widehat{U'HX}$ $(ID // HU')$، فيكون معنا: $\frac{HX}{HU'} = \frac{IJ}{ID}$ ؛

ولكن: $HU' > HD$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{HX}{HD} > \frac{JI}{ID}$ ؛ وكنا قد رأينا أنَّ: $\frac{HL}{HX} > \frac{MI}{IJ}$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{HL}{HD} > \frac{MI}{ID}$ ،

ويكون معنا أيضاً: $\frac{MI}{ID} > \frac{NB}{BD}$.

ونبيِّن، بنفس الطريقة، للدائرة (F, FK) أنّ:

$KU < BO$ ، $UP < NO$ وَ $KP < BN$ ؛

ولكنّ $KD > BD$ ، فيكون إذاً: $\frac{NB}{BD} > \frac{KP}{KD}$ ؛ فيكون معنا إذاً: $\frac{HL}{HD} > \frac{MI}{ID} > \frac{NB}{BD} > \frac{KP}{KD}$.

لنلاحظ أنَّ $\sin \widehat{HDX} = \frac{HX}{DH}$، حيث توتِر الزاويةُ $\widehat{HDX}$ القوسَ $\widehat{HE}$. وهذه القوس تتناقص، عندما تنتقل النقطة X على DE من D إلى E، من الحدّ θ، وهي الزاوية المحصورة بين خط التماس في النقطة D وبين DE عندما تكون X في D، إلى الحدّ 0 عندما تكون X في E.

وتتزايد LX عندما تنتقل X من D إلى O، فالزاوية $\widehat{LQX}$ تتزايد إذاً، لأنَّ المسافة $GO = QX$ تبقى ثابتة. وتتزايد بالتالي الزاوية $\widehat{HLX} = \frac{1}{2}\widehat{LQX}$، وتتزايد أيضاً النسبة $\sin \widehat{HLX} = \frac{HX}{HL}$. وهكذا تتناقص $\frac{HL}{HD} = \frac{HX}{DH} \cdot \frac{HL}{HX}$ عندما تتزايد XD من 0 إلى DO.

ملاحظة: إذا تطابقت DE مع AC يكون $GO = 0$ ، حيث تبقى الزاوية $\widehat{HLX}$ ثابتة ومساوية لِـ $\frac{\pi}{4}$ ، فتبقى إذاً النسبة $\frac{HL}{DH}$ ثابتة أيضاً.

وتتناقص HL عندما تنتقل X من O إلى E، بينما تتزايد DH، وبالتالي فإنَّ النسبة $\frac{HL}{DH}$ تتناقص.

القضية ١٢- نفترض أنّ القطب A بين الأفق وسمت الرأس. لم تعد الدائرة (G, GB) تُمثِّل معدّل النهار، ولكن مُسْتَوِيَها يمرّ كما هي الحال في القضية ١١ في O وسط DE. وذلك أنَّ G في هذه الحالة مُحدَّدة بوصفها المسقطَ العموديّ للنقطة O ، وسط DE ، على القطر AC ، وَ B هي نقطة دائرة نصف النهار على امتداد GO. تظهر لنا ثلاث حالات:

١) AC تقطع DE على النقطة Ω، بعد النقطة E؛

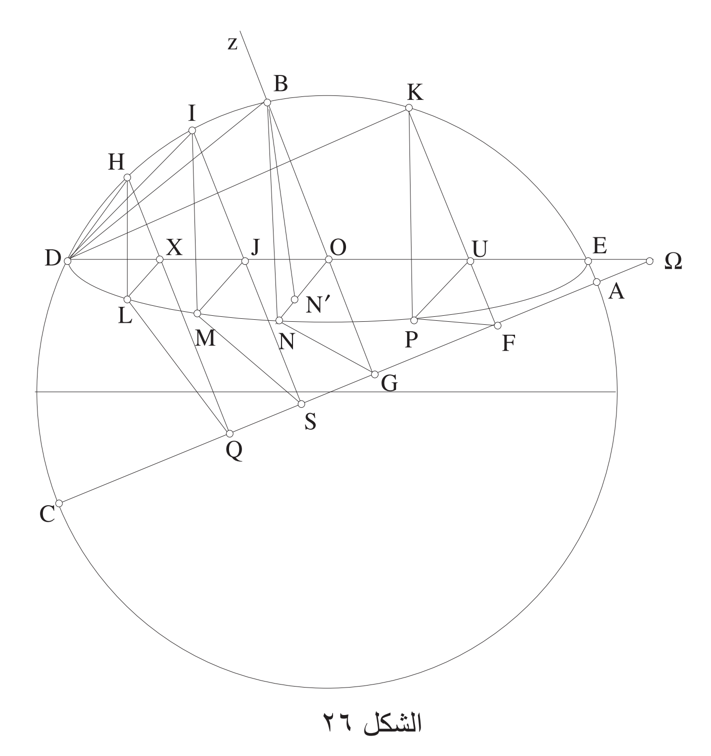
٢) AC تقطع DE على النقطة E $(A = E = \Omega)$؛

٣) AC تقطع DE بين E وَ O التي هي وسط DE.

١) إنَّ الخطوط HQ، IS ، BG وَ KF ، كما كان معنا في السابق، عمودية على AC ، فنستنتج أنَّ: $UF < OG < JS < XQ$ ؛ وكذلك إنَّ الخطوط LX، MJ ، NO وَ PU عمودية على دائرة نصف النهار، فهي إذاً عمودية على DE ؛ فيكون معنا:

$$\widehat{DXL} = \widehat{DJM} = \widehat{DON} = \widehat{DUP} = \text{زاوية قائمة؛}$$

$$\widehat{LXH} = \widehat{MJI} = \widehat{NOB} = \widehat{PUK} = \text{زاوية قائمة.}$$



الشكل ٢٦

إنَّ ON، من جهة أخرى، هو نصف قطر الدائرة $DLMNPE$، فيكون إذاً:

$NO > MJ > XL$ وَ $UP < NO$. ويكون معنا: $XQ > JS$ وَ $XL < MJ$ ، فإذاً:

$\frac{JS}{MJ} > \frac{XQ}{XL}$ ،

أي أن: $\text{cotg}\ \widehat{MSJ} > \text{cotg}\ \widehat{LQX}$، فيكون إذاً $\widehat{MSJ} < \widehat{LQX}$.

إنَّ الزاوية المحاطة $\widehat{HLX}$، في الدائرة (Q, QH)، تقبل قوساً مساوية للقوس $\widehat{HL}$،

والزاوية المركزية $\widehat{LQH}$ تقبل القوس $\widehat{HL}$، فيكون إذاً: $\widehat{HLX} = \frac{1}{2}\widehat{LQH}$ ؛ ويكون أيضاً:

$\widehat{IMJ} = \frac{1}{2}\widehat{MSJ}$ وَ $\widehat{ONB} = \frac{1}{2}\widehat{NGB}$ ، فيكون : $\widehat{IMJ} < \widehat{HLX}$ ؛ ويكون أيضاً:

$\widehat{IMJ} < \widehat{ONB}$.

يكون معنا عندئذ: $\sin\widehat{HLX} = \frac{HX}{HL}$ وَ $\sin\widehat{IMJ} = \frac{IJ}{IM}$.

يكون معنا إذاً: $\frac{IM}{IJ} > \frac{HL}{HX}$ ؛ ونبيّن بنفس الطريقة أنَّ: $\frac{BN}{BO} > \frac{IM}{IJ}$.

وينـتـهَي البرهان مثلما انتهى في القضية ١١.

إنّ لدينا، في الواقع $\frac{HX}{\sin\widehat{HDX}} = \frac{DH}{\sin\widehat{DXH}}$ ، حيث تكون الزاوية $\widehat{DXH} = \widehat{DOz}$ (GOz هو عمود المكان) مستقلّة عن موضع النقطة X عندما تنتقل X على DE ؛ الزاوية $\widehat{DXH}$ توتّر

القوس $\widehat{HE}$ التي تتناقص عندما يتزايد DX، فإنَّ جيبها إذاً يتناقص، كما تتناقص أيضاً النسبة: $\frac{\sin \widehat{HDX}}{\sin \widehat{AOz}} = \frac{HX}{DH}$.

فتكون معنا إذاً، للدوائر التي تكون مراكزها Q ، S و G ، المتباينةُ المزدوجة:

$$\frac{NB}{BD} > \frac{MI}{ID} > \frac{HL}{HD} .$$

البرهان، لهذه الدوائر الثلاث، هو نفسه في الحالات الثلاث ١)، ٢) وَ ٣)، لأنّ معنا في جميع الأحوال: $XQ > JS > OG$ وَ $XL < JM < ON$ ،

فيكون معنا بالتالي: $\frac{\pi}{2} < \widehat{NGO} < \widehat{MSJ} < \widehat{LQX}$ ، فنستنتج من ذلك أنّ:

$$\widehat{HLX} > \widehat{IMJ} > \widehat{BNO} > \frac{\pi}{4} .$$

دراسة دائرة مثل الدائرة (F, FK)

يكون معنا في الحالة ١) (انظر الشكل ٢٦) أو في الحالة ٢) عندما تكون E وَ A متطابقتين: $OG > UF$ وَ $ON > UP$ ؛ فلا تَمْكن المقارنة بين النسبتين $\frac{OG}{ON}$ وَ $\frac{UF}{UP}$. ويُمكن أنْ يكون معنا:

أ) $\frac{OG}{ON} > \frac{UF}{UP} \Leftarrow \widehat{OGN} < \widehat{UFP} \Leftarrow \widehat{ONB} < \widehat{UPK}$

ب) $\frac{OG}{ON} = \frac{UF}{UP} \Leftarrow \widehat{UPK} = \widehat{ONB}$

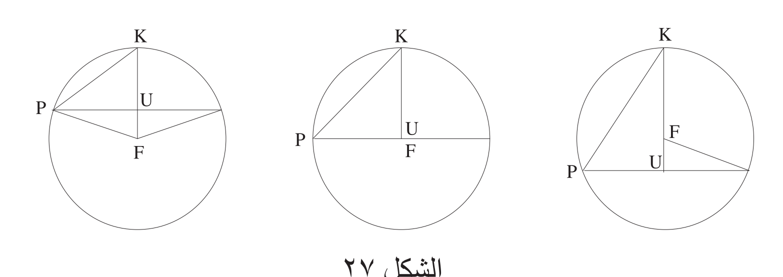
ت) $\frac{OG}{ON} < \frac{UF}{UP} \Leftarrow \widehat{UPK} < \widehat{ONB}$

ويُمكن أن يكون معنا في الحالة ٣)، حيث تكون Ω بين O وَ E:

- U بين O وَ Ω ؛ فتكون U في هذه الحالة بين K وَ F، فيكون معنا: $\widehat{KPU} > \frac{\pi}{4}$ ؛ وتكون الحالات الثلاث أ)، ب)، ت) ممكنة.
- U متطابقة مع النقطة Ω، فيكون في هذه الحالة: $U = F = \Omega$ وَ $\widehat{KPU} = \frac{\pi}{4}$.

• U بين E وَ Ω ؛ فتكون F، في هذه الحالة بين U وَ K ، فيكون معنا $\widehat{KPU} < \frac{\pi}{4}$ ؛

فيكون إذاً: $\widehat{KPU} < \widehat{ONB}$ (الحالة ت).



الشكل ٢٧

ويكون معنا، في الحالتين أ) وَ ب)، $\widehat{ONB} \leq \widehat{KPU}$ ؛ والدائرة (KP) تكون أصغر من الدائرة (BN)، لأنّ كليهما بين معدّل النهار وبين القطب A، والدائرة(KP) تكون أقرب من القطب. يكون معنا إذاً $KP < BN$.

إنّ لدينا، من جهة أخرى $KD > BD$ ، فيكون إذاً: $\frac{PK}{KD} < \frac{BN}{BD}$.

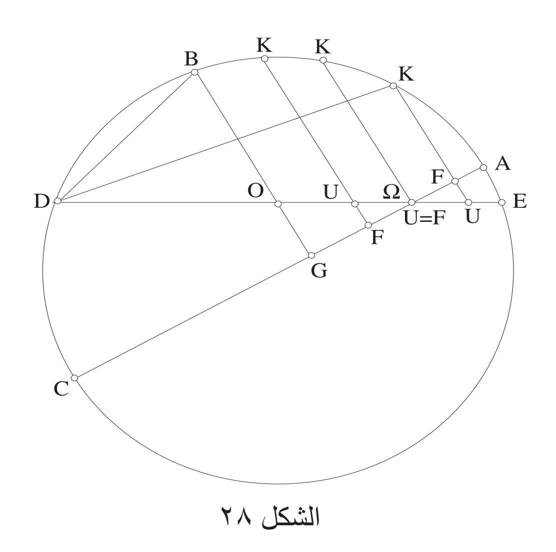
ويكون معنا، في الحالة ت)، $\widehat{ONB} < \widehat{KPU}$ فيكون معنا $\widehat{ONB} < \widehat{KPU}$.

إنّ لدينا نقطة N' على ON بحيث يكون $\widehat{PKU} = \widehat{OBN'}$، ويكون المثلثان OBN' وَ PKU قائمي الزاوية ومتشابهين؛ فيكون معنا: $\frac{BN}{BO} < \frac{BN'}{BO} = \frac{KP}{KU}$.

إنّ لدينا من جهة أخرى: $\frac{UK}{KD} > \frac{BO}{BD}$ ، فإذاً: $\frac{PK}{KD} > \frac{NB}{BD}$.

إذا كانت دائرة $(P'K')$ أقرب إلى القطب A من الدائرة (PK)، يكون معنا : $\frac{K'P'}{K'D} > \frac{KP}{KD}$.

يكون معنا إذاً في جميع الأحوال: $\frac{KP}{KD} > \frac{BN}{BD} > \frac{MI}{ID} > \frac{LH}{HD}$.

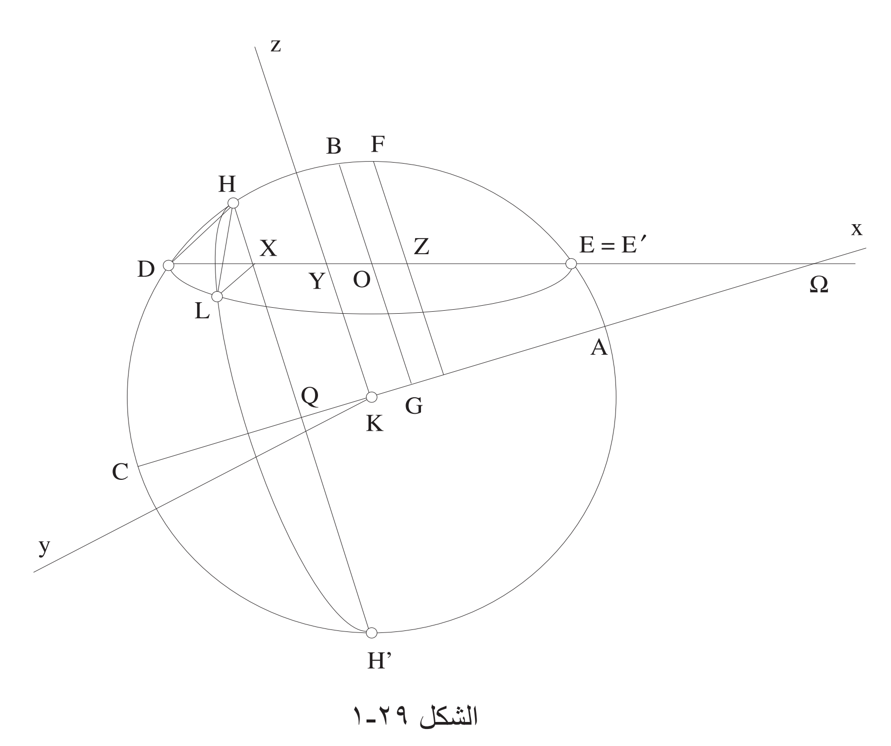


الشكل ٢٨

شرح القضيتين ١١ وَ ١٢:

لِنُعطِ الآن برهاناً بطريقة تحليلية للقضيتين ١١ وَ ١٢ المأخوذتين معاً.

لنأخذ كرةً ذات مِحور AC ومركز K ودائرةً صغيرة DLE ذات قطر DE في مستوي منصف النهار ABC (الشكل ٢٩-١)؛ وهذا القطر موازٍ للمحور AC، في حالة القضية ١١، ويقطع هذا المحور على النقطة Ω، في حالة القضية ١٢. لتكن النقطة F وسط القوس $\widehat{DE}$ ولتكن O وسط DE.



الشكل ٢٩-١

لنفترض أنّ القطبَ A موجود بين الأفق (الذي هو دائرة عظمى موازية لِـ DLE) وسمت الرأس (الذي هو F قطب الدائرة DLE). لتكن HLH' دائرة متغيِّرة ذات المحور AC؛ يقطع قطرها في المستوي ABC الخطَ DE على النقطة X؛ نريد أن نثبت أنَّ النسبة $\frac{HL}{HD}$ تتناقص دوماً عندما تنتقل X على DE من D إلى E ، أي عندما تنتقل H على القوس $\widehat{DE'}$ ، حيث تكون $E = E'$ إذا كانت E فوق AC وحيث تكون E' مُتناظِرة مع النقطة E بالنسبة إلى ـ AC في الحالة المعاكسة.

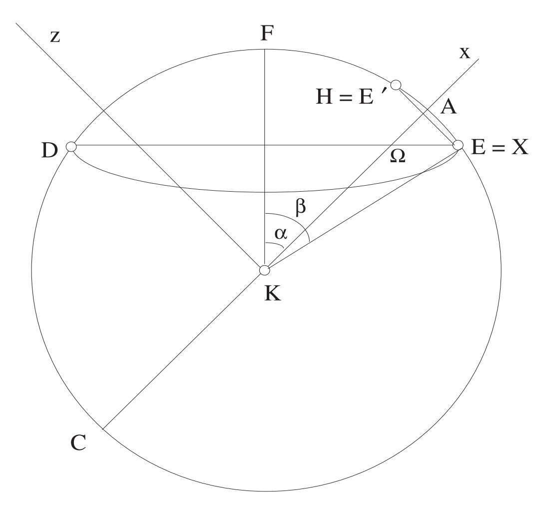
لنرمز بِـ α إلى الزاوية المُتَمِّمَة لعرض النقطة F، وسط القوس DE ، أي أنَّ $\alpha = \widehat{AKF}$ ، ولنرمز بِـ β إلى الزاوية $\widehat{EKF}$ التي هي الفرق بين الزاويتين المتمِّمتَيْن

لعرضيْ E وَ F. ولتكن الزاوية θ الفرق بين الزاويتين المتمِّمتَيْن لعرضيْ F وَ H :
$\widehat{HKF} = \theta$ التي تتغيَّر قيمتها من (- β) عندما تكون H في D، إلى β إذا كان $\alpha \geq \beta$ ، أو إلى $2\alpha - \beta$ إذا كان $\alpha < \beta$ ، عندما تكون H في E' . وذلك أنّ العمود HX على AK، في هذه الحالة، هو $E\ E'$ عندما تكون X في E ؛ فتكون النقطة H حينئذ متطابقة مع E' (انظر الشكل ٢٩-٢). يكون معنا عندئذ:

$$\theta = \left(\overrightarrow{KE'}, \overrightarrow{KF}\right) = \left(\overrightarrow{KE'}, \overrightarrow{KA}\right) + \left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KE}\right) + \left(\overrightarrow{KE}, \overrightarrow{KF}\right) = 2\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KE}\right) + \beta$$ ،

ولكن $\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KE}\right) = \left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KF}\right) + \left(\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{KE}\right) = \alpha - \beta$ ،

فيكون إذاً: $\theta = 2\alpha - \beta$.



الشكل ٢٩-٢

تُكتب معادلةُ القطر DE على الشكل التالي:

$$x \cos \alpha + z \sin \alpha = r \cos \beta \qquad (1)$$

إنّ لدينا وفقاً للفرضيات $\frac{\pi}{2} \geq \beta$ وَ $\alpha > 0$. والإحداثية الأولى x للنقطة X تساوي :
$r \cos(\alpha - \theta) = KQ$ ، مثل إحداثية H الأولى، لذلك فإن إحداثيتها الثالثة z تكون:

$$z = \frac{r}{\sin\alpha}\left(\cos\beta - \cos\alpha \cos(\alpha - \theta)\right)$$.

يكون معنا : $H'H.\ HX = HL^2$ (الدائرة HLH') ، مع:

$$HH' = 2r \sin(\alpha - \theta)$$ ،

$$HX = r\sin(\alpha - \theta) - z = \frac{r}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha \sin(\alpha - \theta) + \cos\alpha \cos(\alpha - \theta) - \cos\beta\right)$$

$$HX = r\frac{\cos\theta - \cos\beta}{\sin\alpha} = 2r\frac{\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\sin\alpha}. \quad (2)$$

ويكون معنا من جهة أخرى:

$$HD = 2r\sin\frac{\beta+\theta}{2}، \quad (3)$$

لأنَّ هذا الوتر يُقابل الزاويةَ المركزية $\widehat{HKD} = \beta + \theta$. وهكذا يكون:

$$\frac{HL^2}{HD^2} = 2r\frac{\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\sin\alpha}\cdot 2r\sin(\alpha-\theta)\cdot\frac{1}{4r^2\sin^2\frac{\beta+\theta}{2}} \quad (4)$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin\alpha\sin\frac{\beta+\theta}{2}}$$

يكون معنا[^]: $(\beta-\alpha)^+ \leq \frac{\beta-\theta}{2} \leq \beta$ وَ $0 \leq \frac{\beta+\theta}{2} \leq \inf(\alpha,\beta)$ ؛ وهكذا تكون $\sin\frac{\beta-\theta}{2}$ دالة تناقصيّة للمتغيِّر θ وتكون $\sin\frac{\beta+\theta}{2}$ دالة تزايديّة للمتغيِّر θ.

أما $\sin(\alpha-\theta)$، حيث يكون $|\alpha-\beta| \leq \alpha-\theta \leq \alpha+\beta$ ، فهي دالة تزايدية للمتغير θ إذا كان $\theta \geq \alpha - \frac{\pi}{2}$ وتناقصيّة إذا كان $\theta \leq \alpha - \frac{\pi}{2}$.

لتكن Y نقطة التقاطع بين DE والمحور Kz ؛ إذا كانت النقطة X بين Y وَ E يكون معنا: $\theta \geq \alpha - \frac{\pi}{2}$ ، فتكون النسبة $\frac{HL^2}{HD^2}$ تزايدية. هذه النتيجة كافية إذا كانت النقطة Y أبعد من D خارج الكرة، أي إذا كان $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

أما في الحالة المعاكسة، حيث يكون $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$، فتكون Y بين D وَ E ، فيجب إعطاء برهان آخر عندما تكون X بين D وَ Y. تتزايد HX، وفقاً لِـ (2)، إذا كان $\theta \leq 0$ ، أي عندما تكون X بين D والنقطة Z التي لها نفس الإحداثية الأولى $(r\cos\alpha)$ لسمت الرأس F (وتكون H في F).

[^] إنَّ $\sup(x, 0) = x^+$ يرمز إلى القسم الموجب من العدد x.

يكون معنا:

$$\frac{HL^2}{HD^2} = \frac{HH'}{HX} \cdot \frac{HX^2}{HD^2}$$ ،

حيث تكون النسبة:

$$\frac{HH'}{HX} = \frac{2r\sin(\alpha-\theta)}{r\sin(\alpha-\theta)-z} = 2\left(1+\frac{z}{r\sin(\alpha-\theta)-z}\right)$$

تناقصية بين D وَ Z، لأن z تتناقص في حين أنَّ: $r\sin(\alpha-\theta)-z = HX$ تتزايد.

وتكون، من جهة أخرى، النسبةُ :

$$\frac{HX}{HD} = \frac{\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin\alpha} \qquad (5)$$

تناقصية عندما تنتقل X على DE من D إلى E؛ وهكذا تكون $\frac{HL^2}{HD^2}$ تناقصية أيضاً عندما تنتقل X على ZE من E إلى Z. وإذا كانت Z أبعد من E خارج الكرة، أي إذا كان: $2\alpha \le \beta$، تكون هذه النتيجة كافية. وإن لم يكن كذلك، فإنَّ Y تكون على يسار Z لأن $0 \le \frac{\pi}{2} - \alpha$، فيتمِّم كلٌّ من البرهانين البرهانَ الآخر؛ وتتناقص $\frac{HL}{HD}$ عندما تنتقل X على DE من D إلى E.

ملاحظات:

١) يقوم ابن الهيثم هنا بدراسة تغيُّر نسبة في حالة أكثر تعقيداً وإعداداً من الحالات السابقة.

وهو يقوم باستدلاله، كما بيَّنا أعلاه، بطريقة مختلفة في فُسْحَتَيْن لتغيُّر X : بين E وO ، ثم بين D وَ O ، حيث تكون O وسط DE. ولنلاحظ أنَّ النقطة O ذات الإحداثية الأولى $r\cos\alpha$ $\cos\beta$ توجد دائماً بين Y وَ Z .

٢) تَرِدُ الزاويتان $\widehat{HDX} = \frac{\beta-\theta}{2}$ وَ $\widehat{HXD} = \alpha$ في العبارة (5)؛ الزاوية الأولى هي الزاوية المحاطة التي توتِّر القوس $\widehat{HE}$، والزاوية الثانية ثابتة. توصَّل ابن الهيثم إلى نفس العبارة للنسبة $\frac{HX}{HD}$ باستخدام تناسب جيوب الزوايا إلى الأضلاع المقابلة لها في المثلّث HDX.

٣) القضية ١١ تخصّ الحالة التي يكون فيها $\alpha = \frac{\pi}{2}$؛ وهذا ما يُبسِّط الحسابات لأنَّ $\sin\alpha = 1$ وَ $\cos\alpha = 0$، فتبقى $z = r\cos\beta$ ثابتة،

وَيكون: $HX = r(\cos\theta - \cos\beta)$. وتكون النقاط Y، O وَ Z ، في هذه الحالة، متطابقة.

٤) يَعتبر ابن الهيثم أنَّ $\frac{HL}{HX}$ مساوية لِـ $\frac{1}{\sin\widehat{HLX}}$؛ وهكذا يكون:

$$\frac{HH'}{HX} = \frac{HL^2}{HX^2} = \frac{1}{\sin^2\widehat{HLX}}.$$

ولكن $\widehat{HLX} = \frac{1}{2}\widehat{LQX}$ (زاوية محاطة في الدائرة HLH')؛ فلذلك يستنتج ابن الهيثم اتجاه تغيُّر $\frac{HH'}{HX}$ من اتجاه تغيُّر الزاوية $\widehat{LQX}$. ولكنَّ $\widehat{LXQ}$ زاوية قائمة، فيكون إذاً:

$$\frac{LX}{XQ} = \operatorname{tg}\widehat{LQX}.$$

تبقى العبارة $XQ = r\cos\beta$ ، في حالة القضية ١١، ثابتةً، فلذلك تتغيَّر الزاوية $\widehat{LQX}$ بنفس اتجاه تغيُّر LX. وتكون العبارة $XQ = z$ ، في الحالة العامة للقضية ١٢، تناقصيّة دائماً وتتزايد LX عندما تنتقل X بين D وَ O.

٥) إذا كانت Ω بين O وَ E ، أي إذا كان $\beta \leq \alpha$ ، يُميِّز ابن الهيثم بين الحالات التي تكون فيها X بين O وَ Ω وبين الحالات التي تكون فيها X بين Ω وَ E . ولقد سمحت لنا الرموز التحليلية بتجنُّب هذا التمييز، إذ إنَّ لدينا ببساطة $z < 0$، عندما تكون X بين Ω وَ E.

٦) لنحسب حَدَّيْ النسبة $\frac{HL}{HD}$ عندما تكون X بين D وَ E. يظهر، وفقاً للعبارة (4)، أنَّ $\frac{HL^2}{HD^2}$ تقترب من اللانهاية عندما تقترب X من D وتصبح θ عندئذ مساوية لِـ $(-\beta)$.

إذا كان $\beta \geq \alpha$ ، يكون معنا $\theta = \beta$ عندما تكون X في E فيكون إذاً $\frac{HL^2}{HD^2} = 0$ ؛ وإذا كان بعكس ذلك $\beta < \alpha$، يكون معنا:

$\theta = 2\alpha - \beta$ وَ $\frac{HL^2}{HD^2} = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha}$ ، أي $\frac{HL}{HD} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\ \alpha}$ وهو حدٌّ منتهٍ.

٧) يُمكن أن ندرس أيضاً تغيُّر العبارة $\frac{HL^2}{HD^2}$ من خلال دراسة إشارة مُشتَقّتها؛ يكفي لذلك أن ندرس إشارة بَسْط (صورة الكسر) مشتقّة العبارة:

$$\frac{\sin(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin\frac{\beta+\theta}{2}}.$$

و يساوي بَسْط هذه المشتقّة :

$$-\cos(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\theta)\cos\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}\cos\frac{\beta+\theta}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\theta)\cos\theta-\cos(\alpha-\theta)\cos\beta+\sin\beta\sin(\alpha-\theta)]$$

$$=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta)$$

وهكذا يجب أن ندرس إشارة العبارة: $\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$ التي لها المشتقّة:

$$\sin(\alpha+\beta-\theta)-\sin(\alpha-\theta)\cos\theta+\cos(\alpha-\theta)\sin\theta=\sin(\alpha+\beta-\theta)+\sin(2\theta-\alpha) \quad :(6)$$

$$=2\sin\frac{\beta+\theta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\right)$$

ويكفي أن نُحدِّد إشارة $\cos\left(\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\right)$، إذ إننا نعرف أنَّ $\sin\frac{\beta+\theta}{2}\geq 0$. نتحقّق أنَّ: $0\leq\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\leq\frac{3\pi}{2}$ ، في جميع الحالات؛ لذلك فإنَّ $\cos\left(\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\right)$ يكون موجباً إذا كان: $\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\leq\frac{\pi}{2}$، ويكون سالباً إذا كان: $\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}>\frac{\pi}{2}$. و هكذا تكون المشتقّة (٦) موجبة إذا كان $\theta\geq\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$ ، وسالبة في الحالة المعاكسة.

وإذا كان $\alpha+2\beta<\frac{\pi}{2}$، يكون معنا دائماً $\theta\geq-\beta>\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$ ، لذلك فإنَّ:

$$\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$$

تتزايد دوماً إلى أن تصل إلى:

$\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\cos\beta=-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$ ، إذا كان $\alpha>\beta$ ،

أو إلى $\cos(2\beta-\alpha)-\cos(\alpha-\beta)\cos(2\alpha-\beta)=-\sin(\beta-\alpha)(2\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha+\sin\beta)$

إذا كان $\alpha<\beta$؛

وتكون هذه العبارة في كلتا الحالتين سالبة، لذلك تبقى العبارة:

$$\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$$

دائماً سالبة.

وهكذا تتناقص $\frac{HL^2}{HD^2}$ في هذه الحالة.

إذا كان $\beta-\alpha>\frac{\pi}{4}$، يكون معنا: $\theta\le 2\alpha-\beta<\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$ ، فلذلك تتناقص $\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$ باستمرار ابتداء من :

$$\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cos\beta=-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)<0 .$$

ونرى بذلك أنَّ $\frac{HL^2}{HD^2}$ تتناقص دوماً، في هذه الحالة أيضاً.

وإذا كان معنا أخيراً $\alpha\ge\beta-\frac{\pi}{4}$ وَ $\alpha\ge\frac{\pi}{2}-2\beta$ فإنَّ العبارة:

$$\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$$

تمرُّ بحدٍّ أدنى في $\theta=\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$. وتكون قيمتاها القُصوَيان :

$$\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cos\beta=-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\le 0$$

وَ

$$\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\cos\beta=-\sin\beta\sin(\alpha-\beta)\le 0$$

إذا كان $\alpha\ge\beta$ ، لأنَّ $\alpha-2\beta\ge-\alpha$ ، أو على التوالي:

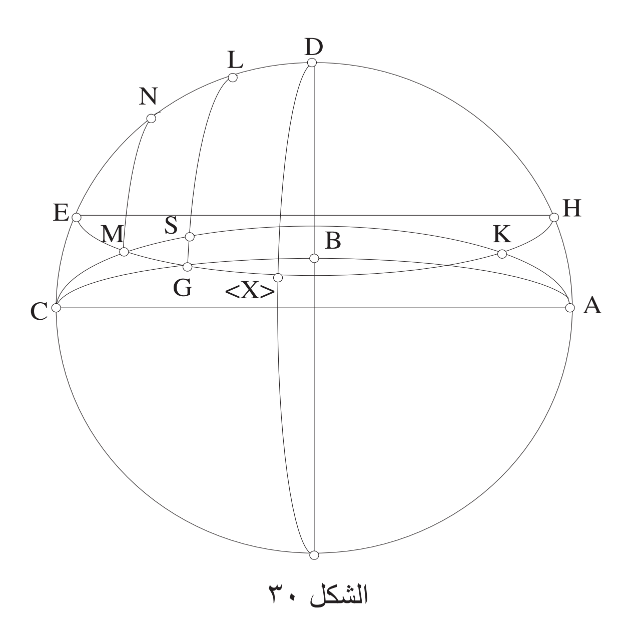
$$\cos(2\beta-\alpha)-\cos(\beta-\alpha)\cos(2\alpha-\beta)=-\sin(\beta-\alpha)(\sin\beta+\sin\alpha\cos(\beta-\alpha))\le 0$$

إذا كان $\beta\ge\alpha$.

وهكذا تتناقص $\frac{HL^2}{HD^2}$، في جميع الحالات، عندما تنتقل X على DE من D إلى E.

القضية ١٣- لتكن (ABC) دائرة الأفق، وليكن D قطبها، ولتكن (ADC) دائرة نصف النهار ولتكن (HE) دائرة موازية للأفق. ولنأخذ دائرتين موازيتين لمعدّل النهار تقطعان دائرة

نصف النهار على N وَ L وتقطعان الدائرة (HE) على M وَ G. إذا كانت النقاط على دائرة نصف النهار وفقاً للترتيب C، E ، N ، L ، D ، فإنَّ القوس $\widehat{GL}$ تكون أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{MN}$.



الشكل ٣٠

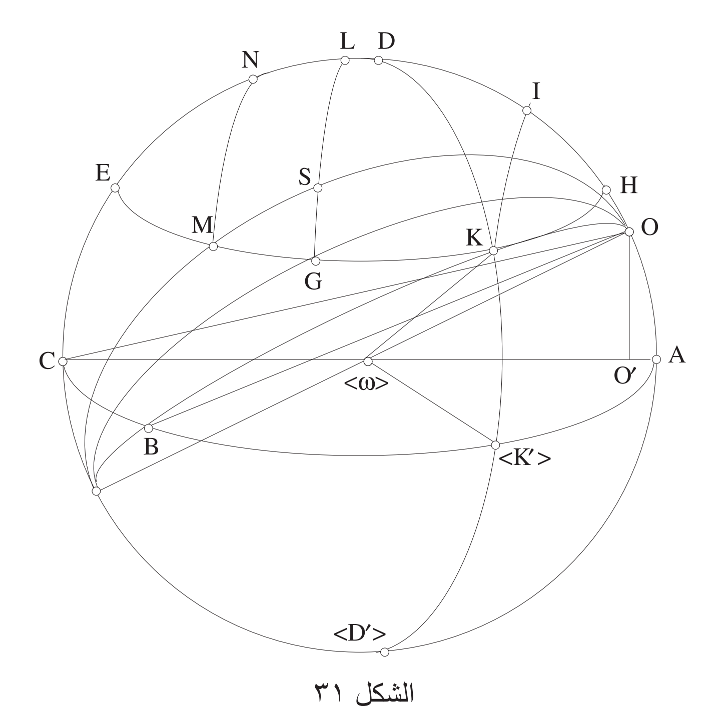
أ) لتكن الكرة منتصبة بالنسبة إلى الأفق. تمرّ دائرة معدّل النهار بالنقطة D وقطباها هما A وَ C. إنَّ مستوي دائرة معدّل النهار هو مستوي تناظرٍ لكل الدوائر ذات القطر AC وللدائرة الأفقية HGE التي يقطعها في X وسط القوس $\widehat{HE}$.

تقطع الدائرةُ (AMC) من جديد الدائرةَ (HGE)على النقطة K وتقطع القوس $\widehat{GL}$ على النقطة S بين G وَ L. القوس المفصولة على LG مشابهة للقوس $\widehat{MN}$. فتكون القوس $\widehat{MN}$ مشابهة إذاً للقوس $\widehat{LS}$ وبالتالي $\widehat{LG}$ هي أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{MN}$.

ب) لتكن الدائرة مائلةً. ولتكن النقطة O قطبها الظاهر؛ يُمكن أن تكون O بين A وَ H، أو أن تكون O في H أو أن تكون O بين H وَ D.

١) لتكن O أوّلاً بين A وَ H. نُخرج من النقطة O دائرةً عظمى مُماسَّةً على النقطة K للدائرة (HGE) وقاطعةً للأفق على النقطة B. يكون معنا $OB < OC$. وذلك لأنَّ النقطة O توجَد على دائرة نصف النهار العمودية على الأفق، فيكون مسقطُها O' على مستوي الأفق تابعاً لِـ CA، ومسافة هذا المسقط إلى A أصغر من مسافته إلى C. فينتج عن ذلك أنَّ كل الخطوط BO' التي تصل O' إلى أية نقطة، B، على دائرة الأفق هي أقلّ طولاً من $O'C$ أو مساوية لِـ $O'C$؛ وكذلك هي حال OB وَ OC.

فيكون إذاً $\widehat{OKB} < \widehat{ODC}$ (وهذان القوسان هما من دائرتين عظميين).



الشكل ٣١

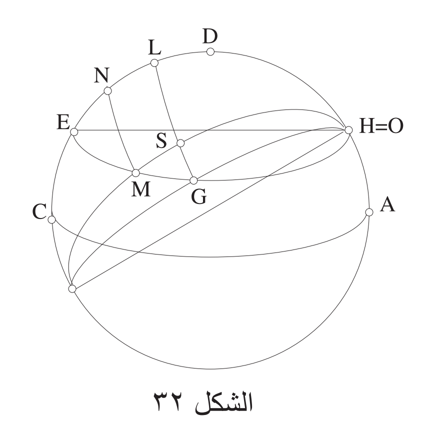
لنأخذ الدائرة العظمى (DK)؛ إنّها عمودية على الدائرة (CBA) وعلى الدائرة (OKB)، فتكون النقطة B إذاً قطباً لها وتكون القوس $\widehat{BK}$ مساوية لربع دائرة عظمى. ولكن القوس $\widehat{CD}$ مساوية أيضاً لربع دائرة، فيكون إذاً $\widehat{OK} > \widehat{OD}$. ونُخرج من K قوساً من دائرة موازية لمعدّل النهار، ولتكن $\widehat{KI}$ هذه القوس. يكون معنا $\widehat{OI} = \widehat{OK}$، فتكون I إذاً بين D وَ H. تقطع الدائرتان (OM) وَ (GO) القوس $\widehat{KI}$ على نقطتين مختلفتين.

النقطة M هي بين G وَ E ؛ ومستوي الدائرة OM هو إذاً بين مستوي الدائرة العظمى GO وبين مستوي دائرة نصف النهار.

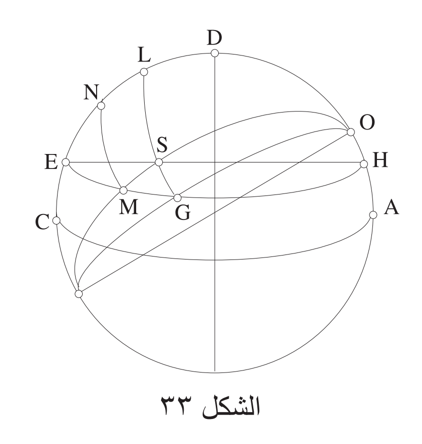
شرح:

يُمكن أن نعتبر هذه القضيّةَ مقدّمةً، أيْ قضيّة تمهيدية. والنتيجة بديهية، وفقاً للتحديدات المعطاة في نصّ القضية حول النقاط C، E ، N ، L وَ D:

إنّ مستويَ الدائرة العظمى (OM)، إذا كانت النقطة O قطب دائرة معدّل النهار $(A = O)$ أو $(A \neq O)$، يكون في جميع الأحوال بين مستوي الدائرة العظمى (GO) ومستوي نصف النهار؛ والقوس $\widehat{MO}$ تقطع إذاً القوس $\widehat{LG}$ على النقطة S، والقوسان $\widehat{LS}$ وَ $\widehat{MN}$ متشابهتان؛ وبالتالي تكون $\widehat{LG}$ أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{MN}$.



الشكل ٣٢



الشكل ٣٣

٢) القطب هو في النقطة H $(O=H)$،

٣) القطب O هو بين H وَ D.

تكون الدائرة (OM)، في الحالتين ٢) وَ ٣)، بين دائرة نصف النهار والدائرة (GO).

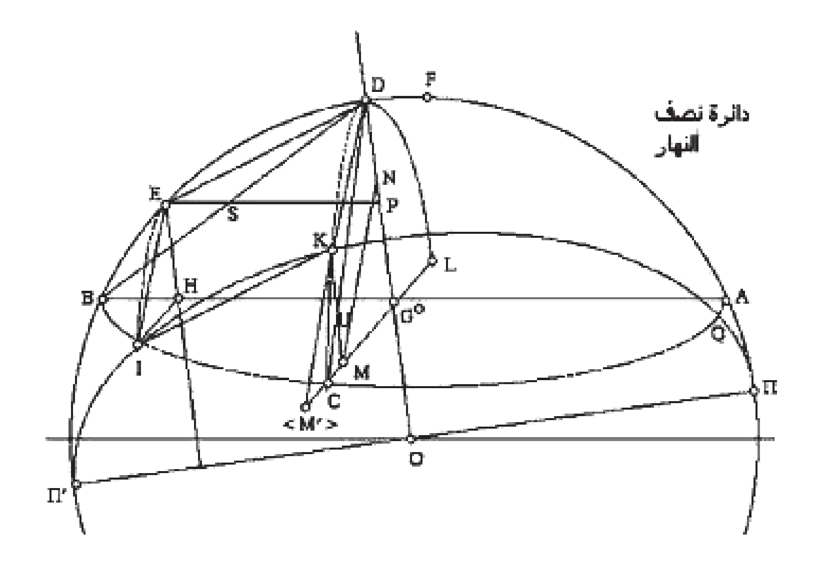
القضية ١٤- لتكن معنا دائرتان موازيتان لمعدِّل النهار تقطعهما دائرةُ نصف النهار على النقطتين D وَ E، وتقطعهما الدائرةُ CBA الموازية للأفق على النقطتين I وَ C، وتقطعهما دائرةٌ مارة بمحور العالم على النقطتين I وَ K.

فإذا كان $\frac{1}{2}\widehat{ADB} \geq \widehat{BD} > \widehat{BE}$ يكون معنا عندئذ $\frac{\widehat{IE}}{\widehat{EB}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{DB}} > \frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$.

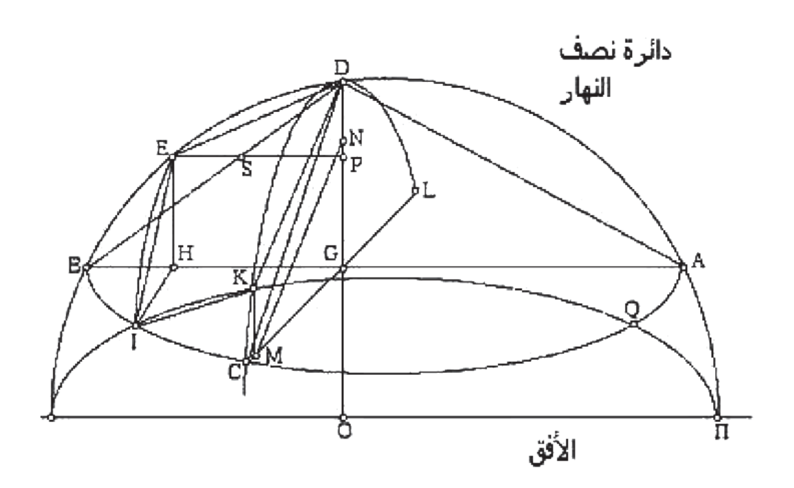
إذا افترضنا أنَّ المستوي CBA فوق الأفق وإذا سمّينا Π القطب الظاهر لدائرة معدّل النهار، يُمكن أن يكون Π على الأفق، أو بين الأفق والنقطة A، أو في النقطة A، أو بين A وسمت الرأس.

إنّ قسميْ الدائرتين IE وَ DC الواقعين فوق الأفق هما نِصفَا دائرة، وذلك في الحالة الخاصة التي تكون فيها CBA دائرة الأفق ويكون القطب Π في النقطة A (هذه هي حالة الكرة المنتصبة).

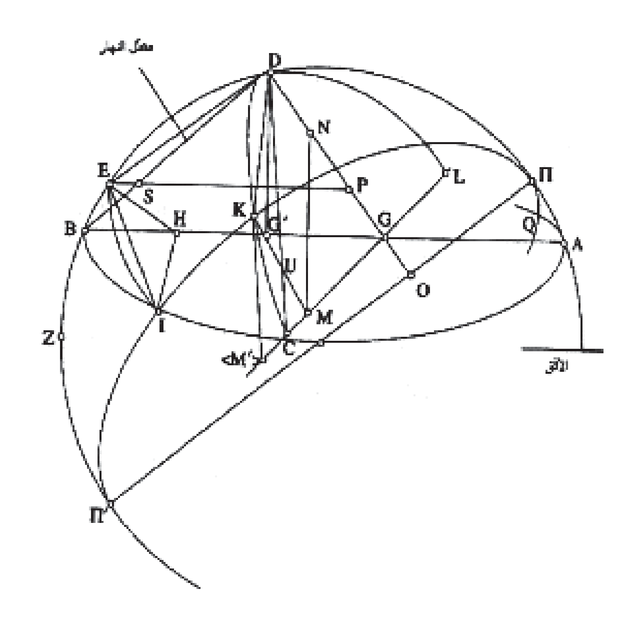
أ) الدائرة EI أصغر من الدائرة CDL.



الشكل ٣٤ : القطب الظاهر Π هو فوق الأفق، $\overset{\frown}{BD} \leq \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$. ويُفترض أنّ النقطة D هي على دائرة معدّل النهار أو أنّ D وَ E بين دائرة معدّل النهار والنقطة B. النقطة O، مركز الدائرة CKD، هي إمّا على الأفق وأمّا تحت الأفق. مركز الدائرة EI هو تحت الأفق.



الشكل ٣٥: الحالة الخاصة: الكرة المنتصبة. القطب Π هو على الأفق وَ $\overset{\frown}{BD} \leq \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$. مراكز كل الدوائر المتوازية هي إذاً على الأفق.



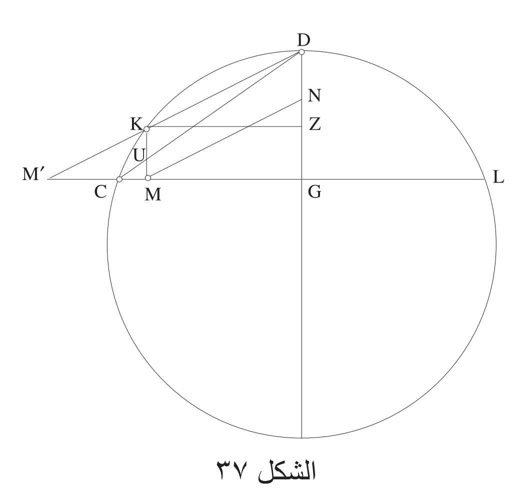
الشكل ٣٦: القطب Π هو فوق الأفق، $\widehat{BD} \le \frac{1}{2}\widehat{ADB}$. النقطتان D وَ E هما من جهتيْ معدّل النهار.

مركز الدائرة EI هو تحت الأفق. مركز الدائرة CKD هو فوق الأفق.

يكون معنا: $CG \perp DG$ وَ $HI \perp EH$. نُخرِج KM وَ MN بحيث يكون $KM \perp CG$ وَ $DK \,//\, MN$ ، فيكون معنا إذاً $DN = KM$ وَ $DK = MN$.

القوسان $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{KD}$ متشابهتان، ولكنّ الدائرة CDL أكبر من الدائرة EI ، فيكون إذاً $EI < DK$ وَ $EI < MN$. المثلثان EHI وَ NGM متشابهان، فيكون معنا إذاً $EH < NG$.

نُخرِج EP بحيث يكون $BG \,//\, EP$ ، فيكون معنا $EH = PG$ ؛ وتكون N إذاً بين P وَ D، وتكون P بين N وَ G. الخطّ DB يقطع EP على النقطة S ، فيكون معنا:



الشكل ٣٧

$\widehat{DSP} = \widehat{DBH} >$ زاوية قائمة. فتكون الزاوية $\widehat{DSE}$ إذاً منفرجة ويكون: $DE > DS$.

- إذا كانت الدائرةُ LDC دائرة معدّل النهار أو إذا كانت أقرب إلى القطب المختفي من دائرة معدّل النهار، تكون القوس $\widehat{CDL}$ أصغر من نصف دائرة.

- إذا كانت الدائرة CKD بين دائرة معدّل النهار والقطب الظاهر، فإنها تكون أقرب إلى دائرة معدّل النهار من الدائرة EI.

- إذا كانت الكرة منتصبة، فإنّ قسم الدائرة CDL الذي هو فوق الأفق يساوي نصف دائرة، فتكون القوس $\widehat{CDL}$، إذاً ، وبالأحرى القوس $\widehat{KDL}$، أصغر من نصف دائرة.

- إذا كانت الكرة مائلة، فإنَّ قسم الدائرة CDL، الذي هو فوق الأفق، يكون أكبر من نصف دائرة.

إذا رمزنا بِـ X إلى القوس، من الدائرة CKD، التي هي تحت المستوي CBA، فإنّ هذه القوس X أكبر من القوس المشابهة لِـ $2\widehat{EI}$؛ إنَّ هذه القوس، بالفعل، أكبر من قسم الدائرة CKD الذي هو تحت الأفق، وقسمُ الدائرة EI الذي هو فوق المستوي CBA، أصغر من قسم هذه الدائرة الذي هو فوق الأفق؛ فيكون معنا: $X > 2\,\widehat{DK}$. فنستنتج إذاً أنّ:

$$2\,\widehat{DK} + \widehat{CK} < X + \widehat{CK}$$

$$\widehat{DK} + \widehat{CD} < X + \widehat{CK}$$

ولكن $\widehat{CD} = \widehat{DL}$ فيكون: $\widehat{LK} < X + \widehat{CK}$. وهكذا تكون القوس $\widehat{LK}$ أصغر من نصف دائرة، لأنَّ $X + \widehat{CK} + \widehat{LK}$ تُشكِّل الدائرةَ بكاملها.

يكون معنا إذاً، في جميع الأحوال: $\widehat{KCL} >$ زاوية قائمة ، وهذا ما يجعل M بين C وَ G لأنَّ $KM \perp CG$. الخط CD يقطع KM على النقطة U. نُخرِج من النقطة K الخط KM' بحيث يكون $DC \,//\, KM'$ ، فيكون معنا: $MM' > MC$، فيكون إذاً: $KM' > KC$ ، فنستنتج أنَّ: $\frac{KC}{KM} > \frac{KM'}{KM}$، فيكون: $\frac{KC}{KM} > \frac{CU}{UM}$ ؛ ولكن $\frac{CD}{DG} = \frac{CU}{UM}$ ، فيكون:

$$\frac{CD}{DG} > \frac{KC}{KM}. \qquad (\alpha)$$

يكون معنا من جهة أخرى: $DE > DS$ وَ $ND < PD$، فإذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{PD}{DS}$. ولكن:

$\frac{DG}{DB} = \frac{PD}{DS}$ وَ $ND = MK$ ،

فيكون إذاً:

$$(\beta) \qquad \frac{MK}{DE} > \frac{DG}{DB}.$$

نستنتج من (α) وَ(β) أنّ: $\frac{KC}{DE} > \frac{CD}{DB}$ ، أو بعد التبديل أيضاً:

$\frac{DB}{DE} > \frac{CD}{CK}$ أو $\frac{DB}{KI} > \frac{CD}{CK}$ (لأنَّ $KI = DE$).

- إذا كانت الدائرة منتصبة، يكون معنا: $DG \perp AB$؛ ولكنَّ معنا وفقاً للفرضيات: $\overset{\frown}{BD} \geq \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$ ؛ فيكون بالتالي $AG \geq GB$ ، فإذاً $AG \geq \frac{1}{2}AB$. ولكن $GC \leq \frac{1}{2}AB$، فيكون إذاً: $AG \geq GC$، ومن ذلك: $AD \geq DC$؛ فنستنتج أنَّ $\widehat{DCG} \leq \widehat{DAG}$ ، فتكون $\overset{\frown}{BD}$ أصغر من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{DL}$ أو مساوية لها. ولكن $\overset{\frown}{DL} = \overset{\frown}{DKC}$ ، فتكون القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{DKC}$ مساوية للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو أعظم منها.
- إذا كانت الكرة مائلة، وإذا كان $DG' \perp AB$ ، تكون G' بين G وَ B، ويكون: $G'A \geq \frac{1}{2}AB$:

- إذا كان $\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$ ، يكون $G'A = \frac{1}{2}AB$ وَ $GA > \frac{1}{2}AB$ ، فيكون إذاً $GC < \frac{1}{2}AB$ وَ $DG' < GD$. ولكن معنا:

$$\widehat{DCG}\ \text{tg} = \frac{DG}{GC} \quad \text{و} \quad \widehat{DAB}\ \text{tg} = \frac{G'D}{G'A}،$$

فنستنتج أن: $\widehat{DAB} > \widehat{DCG}$ ،

فتكون القوس $\overset{\frown}{DL}$ أعظم من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو مساوية لها، وتكون القوس $\overset{\frown}{DKC}$ أكبر من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو مساوية لها.

- إذا كان $\overset{\frown}{BD} > \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$ ، يكون $G'A > \frac{1}{2}AB$؛ ولكن $GC \le \frac{1}{2}AB$، فيكون إذاً $AG' > GC$ وَ $DG' < GD$ ، فيكون معنا أيضاً: $\overset{\frown}{DAB} < \overset{\frown}{DCG}$ ، فنستنتج أنَّ القوس $\overset{\frown}{DKC}$ أعظم من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو مساوية لها.

وهكذا تكون القوس $\overset{\frown}{DKC}$ ، في جميع الحالات، أكبر من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو مساوية لها.

لقد برهنّا أنَّ $\frac{BD}{DE} > \frac{CD}{CK}$ ؛ فيكون معنا إذاً وفقاً للقضية ٤ (الخاصة بدائرتين مختلفتين):

$$\frac{\overset{\frown}{BED}}{\overset{\frown}{DE}} > \frac{\overset{\frown}{CKD}}{\overset{\frown}{CK}}.$$

فإذا بدّلنا يكون معنا: $\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} = \frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{DE}} < \frac{\overset{\frown}{CKD}}{\overset{\frown}{BED}}$.

فنستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{\overset{\frown}{CKD} - \overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{BED} - \overset{\frown}{DE}} = \frac{\overset{\frown}{KD}}{\overset{\frown}{EB}} > \frac{\overset{\frown}{CKD}}{\overset{\frown}{BED}} > \frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{DE}}$ ؛[٩]

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ القوس $\overset{\frown}{KD}$ مشابهة للقوس $\overset{\frown}{EI}$ وأنَّ $\overset{\frown}{KI} = \overset{\frown}{DE}$ ، يكون معنا:

$$\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} < \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{BD}} < \frac{\overset{\frown}{EI}}{\overset{\frown}{EB}}.$$

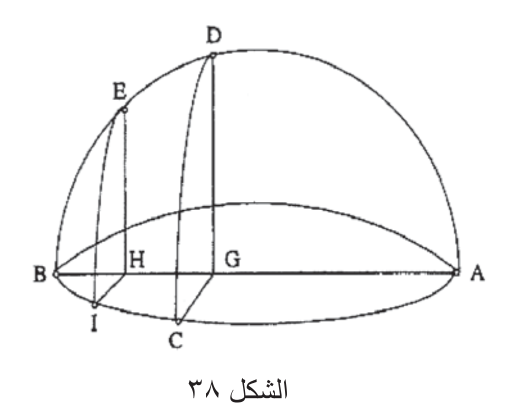
لقد استبدل ابن الهيثم، هنا، القوس $\overset{\frown}{KD}$ بالقوس $\overset{\frown}{EI}$ المشابهة لها؛ ولكن معنا، في الحالة المعنية، $\overset{\frown}{KD} > \overset{\frown}{EI}$ ، لأننا افترضنا أنَّ نصفَ قطر الدائرة CKD أكبر من نصف قطر الدائرة EI. لكنَّ القوسين $\overset{\frown}{EI}$ وَ $\overset{\frown}{KD}$ موترّتان بنفس الزاوية في دائرتين مختلفتين، فيُمكن الظن أنَّ ابن الهيثم كان يفكِّر عند إقامة برهانه في الزوايا، في حين أنـَّه صاغ برهانه معبِّراً بالأقواس ؛ وهذا ما أدّى إلى الالتباس. وهكذا لا يُمكن الحصول على النتيجة المرجوّة بهذه الطريقة.

تبقى لدينا المتباينة $\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} < \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{BD}}$.

يلفت ابن الهيثم النظر إلى أنّ البرهانَ نفسَه صالحٌ إذا كانت الدائرةُ ABC دائرةَ الأفق.

---

[٩] $b(a-c) > a(b-d) \Leftrightarrow ab - bc > ab - ad \Leftrightarrow bc < ad \Leftrightarrow \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ ، فإذاً $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ ؛ فإذاً $a > c$ وَ $b > d \Leftarrow \frac{c}{d} < \frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-d}$.



الشكل ٣٨

القطبان هما النقطتان A وَ B، في الحالة الخاصة التي تكون فيها الكرة منتصبة.

لنأخذ دائرةً اختيارية، تمرّ بالنقطتين A وَ B، وتقطع دائرتين موازيتين لدائرة معدّل النهار ولا تقطع الدائرة CBA. وهذه الأخيرة تمرّ بالنقطتين I وَ C، فتكون النقطة K ملتصقة بالنقطة C. القوسان $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{DC}$ متشابهتان، ولدينا وفقاً للفرضيات $\widehat{EB} > \widehat{DB}$؛ فيكون معنا إذاً:

$$\frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}} < \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}}\text{ ،}$$

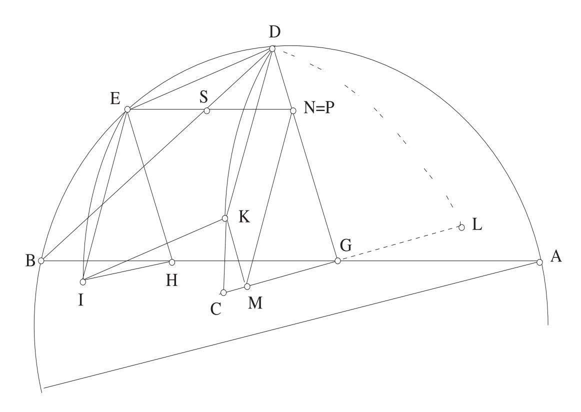
وذلك لأنَّ:

$$\frac{\widehat{EI}}{\widehat{CD}} = \frac{EH}{DG} = \frac{\sin \widehat{BE}}{\sin \widehat{BD}} < \frac{\widehat{BE}}{\widehat{BD}}.$$

ب) **لنفرض أنَّ الدائرة (EI) مساوية للدائرة (DC)** .

تكون هاتان الدائرتان متناظرتين بالنسبة إلى مستوي دائرة معدّل النهار.

إذا رمزنا، كما فعلنا سابقاً، بِـ X إلى قوس الدائرة (DC) التي هي تحت المستوي ABC، يكون معنا: X أكبر من القوس المشابهة لِـ $2\widehat{EI}$ ، فيكون إذاً: $X > 2\widehat{DK}$، سواء أكانت الكرة منتصبة أم مائلة. يكون معنا إذاً: $X + \widehat{CK} > \widehat{LK}$ ؛ وبالتالي تكون $\widehat{KCG}$ أصغر من زاوية قائمة، وتكون M بين C وَ G .



الشكل ٣٩

القوسان $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{DK}$ متساويتان، فيكون إذاً: $DK = EI$ وَ $DK // EI$؛ ويكون معنا أيضاً: $MN = EI$ وَ $MN // EI$. ونستنتج من ذلك أنّ: $GN = EH$. الخط الموازي لِـ AB، الخارج من E، يمرّ إذاً بالنقطة N ويكون $P = N$ وَ $KM = PD$.

يكون معنا: $DS < DE$، لأنّ الزاوية $\widehat{DSE}$ منفرجة، فإذاً: $\frac{PD}{DE} > \frac{PD}{DS}$؛ ولكنَّ $\frac{DG}{DB} = \frac{PD}{DS}$،

$\frac{KM}{KI} = \frac{PD}{DE}$ (لأنَّ $DE = KI$)؛ فيكون إذاً: $\frac{KM}{KI} > \frac{DG}{DB}$.

ولكن، من جهة أخرى، $\frac{CK}{KM} > \frac{CD}{DG}$ ($\widehat{KCM} < \widehat{DCG}$)، فيكون إذاً: $\frac{CK}{KI} > \frac{CD}{DB}$.

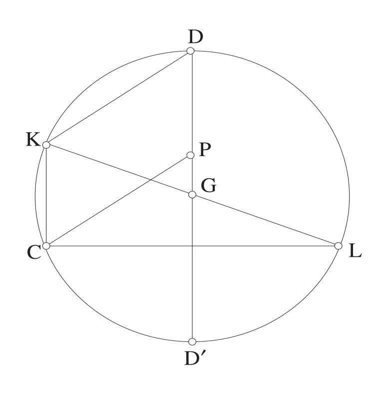
ننهي البرهان كما فعلنا سابقاً، ويكون معنا: $\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} > \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{BD}} > \frac{\overset{\frown}{EI}}{\overset{\frown}{EB}}$.

درس ابن الهيثم الحالتين الخاصتين التاليتين:

- إذا كانت الدائرة (CBA) أفقاً، وإذا كانت الكرة مائلةً، يكون معنا:

$\widehat{KD} = \widehat{EI} = \widehat{CD'}$،

حيث تكون D' النقطة المقابلة قطرياً للنقطة D على الدائرة CDL، فيكون:



الشكل ٤٠

$DD' \,//\, KC$ وتكون الزاوية $\widehat{KCL}$ قائمة؛ وبما أنّ في النص: $\overset{\frown}{LDK} = \overset{\frown}{LD'C} + \overset{\frown}{CK}$ ،

يكون معنا عندئذ $M = C$ ، فيكون $PD = KC$ وَ $\frac{KC}{KI} = \frac{PD}{KI} = \frac{PD}{DE}$.

ولكنَّ $\frac{CD}{DB} < \frac{DG}{DB} < \frac{PD}{DE}$، فإذاً: $\frac{KC}{KI} > \frac{CD}{DB}$ ، وننهي البرهان كما فعلنا سابقاً.

- إذا كانت الدائرة (CBA) أفقاً، وإذا كانت الكرة منتصبةً، يكون معنا:

$\overset{\frown}{IE} = \overset{\frown}{DC}$ وَ $\overset{\frown}{DB} > \overset{\frown}{EB}$ ، فإذاً: $\frac{\overset{\frown}{IE}}{\overset{\frown}{EB}} < \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{BD}}$.

تمرّ الدائرة $\Pi I \Pi'$، في هذه الحالة، بالنقطة C $(C = K)$.

ت) **لنفترض أنّ الدائرة (EI) أكبر من الدائرة (DC)** وأنّ الكرة مائلة باتجاه النقطة B.

وهذا ممكن في ثلاث حالات:

* الدائرة (EI) هي دائرة معدّل النهار.

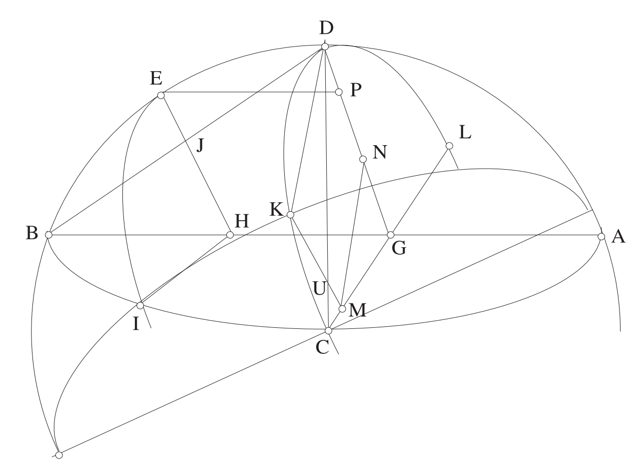
* الدائرتان هما على جهتي دائرة معدّل النهار وتكون (EI) أقرب إلى دائرة معدّل النهار من (CD).

* الدائرتان هما بين دائرة معدّل النهار والقطب الظاهر.

لنفترض أنَّ : $\overset{\frown}{BD} \geq \overset{\frown}{ADB} \frac{1}{2}$.

الخط BD يقطع EH على النقطة J ؛ ونفترض أنَّ $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{EH}{HJ}$ ، حيث يكون d_1 وَ d_2 على التوالي قطري الدائرتين (EI) وَ (DH)، مع $d_2 < d_1$.

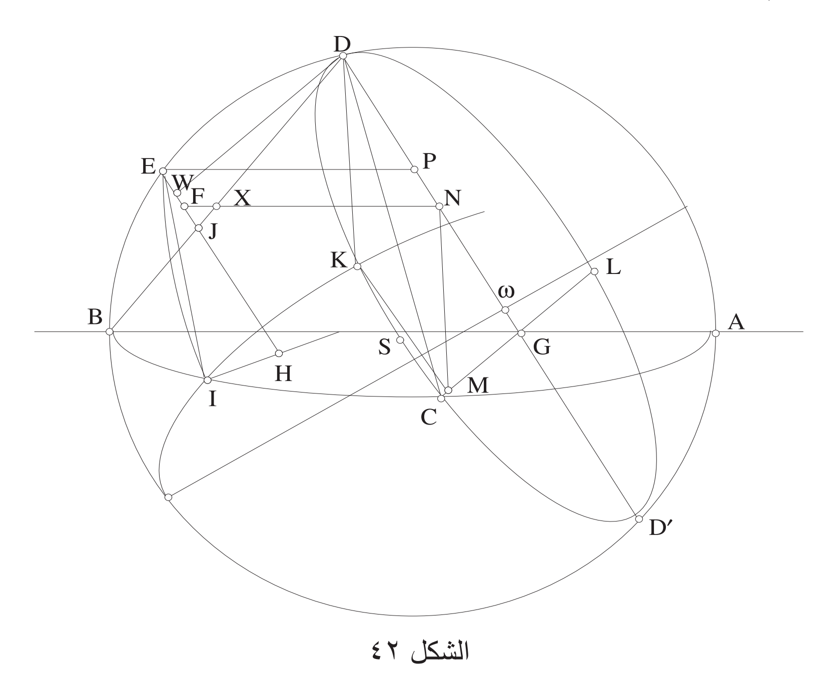
* إذا كانت القوس $\overset{\frown}{LDC}$ أصغر من نصف دائرة، تكون القوس $\overset{\frown}{LDK}$ أصغر من نصف دائرة، ونحصل على النتيجة $\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} > \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{BD}} > \frac{\overset{\frown}{EI}}{\overset{\frown}{EB}}$.



الشكل ٤١

نكون، في الواقع، من جديد ضمن شروط الحالة التي درسناها على الصفحة ١٠٦ حيث تكون الزاوية $\widehat{KCL}$ حادة وتكون M بين C وَ G وتكون U بين K وَ M ؛ يكون معنا: $\frac{CK}{KM} > \frac{CU}{UM}$، مع $\frac{CD}{DG} = \frac{CU}{UM}$ وَ $ND = KM$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{CK}{ND} = \frac{CK}{KM} > \frac{CD}{DG}$.

* إذا كانت القوس $\widehat{LDC}$ أكبر من نصف دائرة، وإذا رمزنا بِـ X إلى قسم هذه الدائرة الذي هو تحت ABC، حيث يكون X أصغر من نصف دائرة، وإذا أخرجنا CS بحيث يكون $DG//CS$، يكون معنا: $\widehat{DS} = \frac{1}{2}X$ (وهذه القوس متناظرة مع نصف القوس X بالنسبة إلى مركز الدائرة CDL).



الشكل ٤٢

لنفترض أنَّ: $\widehat{IE} \geq$ (قوس مشابهة للقوسX)، أي أنَّ: $\widehat{IE} \geq$ (قوس مشابهة للقوس $2\widehat{DS}$)[١٠].

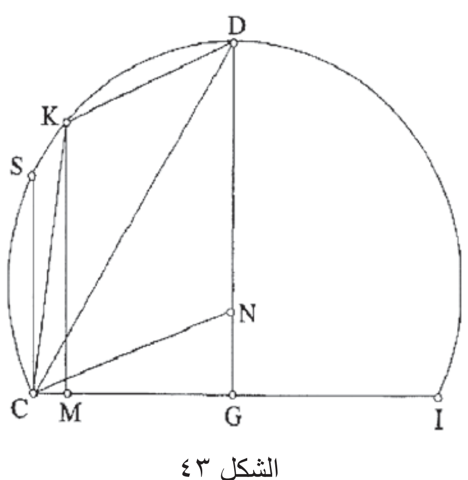
ولكن $\widehat{IE}$ وَ $\widehat{DK}$ قوسان متشابهتان. نفترض إذاً أنَّ $\widehat{DK} \leq 2\widehat{DS}$. يكون لدينا ثلاث حالات ممكنة:

(أ) $\widehat{IE} >$ (قوس مشابهة للقوس $\widehat{DS}$) <= $\widehat{DK} < \widehat{DS}$

(ب) $\widehat{IE} =$ (قوس مشابهة للقوس $\widehat{DS}$) <= $\widehat{DS} = \widehat{DK}$

(ت) $\widehat{IE} <$ (قوس مشابهة للقوس $\widehat{DS}$) <= $\widehat{DS} < \widehat{DK}$

(أ) $\widehat{DS} > \widehat{DK}$، تكون K إذاً بين D وَ S لأنَّ الزاوية $\widehat{KCG}$ حادة وتكون النقطة (ب)



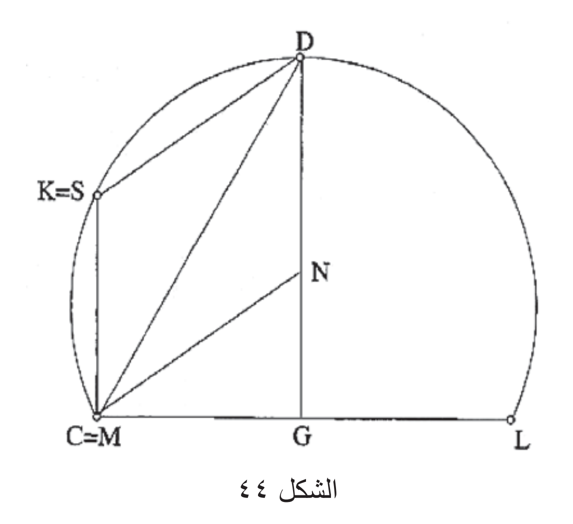
الشكل ٤٣

M بين G وَ C. يكون معنا: $\frac{CK}{KM} > \frac{CD}{DG}$ وَ $KM = ND$ ، فنستنتج أنَّ: $\frac{CK}{ND} > \frac{CD}{DG}$.

(ت) $\widehat{DS} = \widehat{DK}$ ، فيكون $S = K$ ، $C = M$ ، $ND = KM = CK$ ،

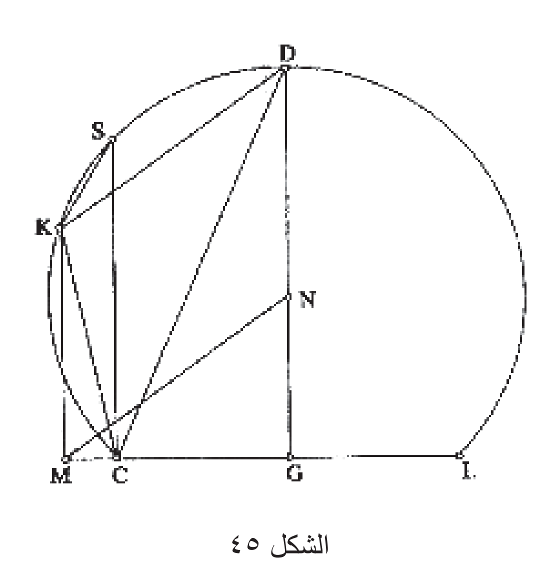
$1 = \frac{CK}{ND} = \frac{CK}{KM}$ ، $\frac{CK}{KM} > \frac{CD}{DG}$ أو $\frac{CK}{ND} > \frac{CD}{DG}$.

[١٠] انظر التعليق الإضافي [٤]



الشكل ٤٤

(ت) $\widehat{DK} < \widehat{DS}$، فتكون K بين C وَ S. ولكن $\widehat{EI}$ مشابهة للقوس $\widehat{DK}$ التي تحقق $\widehat{DK} \geq 2\,\widehat{DS}$، فيكون إذاً: $\widehat{SK} \leq \widehat{DS}$، $\widehat{SCK} \leq \widehat{SCD}$، فنستنتج أنَّ: $\widehat{SCK} \leq \widehat{CDG}$.



الشكل ٤٥

نُخرِج KM، بحيث يكون $KM \perp CG$، فتكون M أبعد من C؛ فيكون معنا: $MG > CG$ وَ $KM < GD$. نُخرِج MN بحيث يكون $MN \,//\, KD$، فيكون معنا:

$KM = ND$، وَ $\widehat{MKC} = \widehat{KCS} \leq \widehat{CDG}$.

إذا كان: $\widehat{KCS} = \widehat{CDG}$، يكون عندئذ $\frac{CK}{KM} = \frac{CD}{DG}$.

إذا كان: $\widehat{KCS} < \widehat{CDG}$ = يكون عندئذ $\frac{CK}{KM} > \frac{CD}{DG}$.

يكون معنا إذاً : $\frac{CD}{DG} \geq \frac{CK}{ND}$.

وتكون النتيجة في الحالات الثلاث (أ)، (ب) وَ (ت) أنّ: $CK = ND$ أو $\frac{CD}{DG} \geq \frac{CK}{ND}$.

القوسان $\widehat{DK}$ وَ $\widehat{EI}$ متشابهتان والدائرة EI هي أكبر من الدائرة DK ، فيكون إذاً:
$DK < EI$ وَ $\frac{EI}{DK} = \frac{d_1}{d_2}$.

يكون معنا: $DK = MN$ وبالتالي $MN < EI$. والمثلثان MNG وَ EIH متشابهان، فيكون إذاَ: $NG < EH$.

إنّ لدينا من جهة أخرى $AB // EP$ ، فنستنتج أنّ $PG = EH$ ، فيكون معنا إذاَ $NG < PG$ وبالتالي $PD < ND$.

ولكنّ $\frac{EI}{DK} = \frac{EI}{MN} = \frac{EH}{NG} = \frac{d_1}{d_2}$ ؛ وبما أنَّ $\frac{EH}{HJ} \geq \frac{d_1}{d_2}$ وفقاً للفرضيات، يكون إذاً: $\frac{EH}{HJ} \geq \frac{EH}{NG}$، فنستنتج أنَّ: $HJ \leq NG$.

١) إذا كان $HJ = NG$ ، يكون عندئذ $NJ // GH$ وَ $\frac{ND}{DJ} = \frac{DG}{DB}$.

ويكون في هذه الحالة: $\frac{EH}{HJ} = \frac{d_1}{d_2}$، فنستنتج أنّ: $\frac{EH}{EJ} = \frac{d_1}{d_1 - d_2}$.

٢) إذا كان $NG > HJ$ نُخرِج NF بحيث يكون $GH // NF$، فيكون معنا: $HJ < HF = NG$ ؛ والخط NF يقطع DJ على X بين J وَ D . يكون معنا:

$$\frac{ND}{DX} = \frac{GD}{DB} \text{ وَ } \frac{EH}{HF} = \frac{d_1}{d_2} \text{ وَ } \frac{EH}{EF} = \frac{d_1}{d_1 - d_2} .$$

نُخرِج DW بحيث يكون $DW \perp EH$، فيكون عندئذ: $2EW = d_1 - d_2$ (لأنَّ DW موازٍ لخط القطبين، أي لمحور الدائرتين EI وَ DC).

يكون معنا، في الحالة ١)، $2EW > EJ$ (لأنَّ $d_1 > EH$).

* إذا كان $\frac{1}{2} d_1 = EH$ ، يكون عندئذ $EW = EJ$ ، $W = J$ ، فيكون معنا إذاً: $DJ \perp EH$ ، فإذاً: $DJ < DE$.

* إذا كان $\frac{1}{2}d_1 > EH$ ، يكون عندئذ $EW > EJ$ ، فتكون الزاوية $\widehat{DJE}$ منفرجة، ويكون معنا أيضاً: $DE > DJ$.

* إذا كان: $\frac{1}{2}d_1 < EH$ ، يكون عندئذ $EW < EJ$ ، فتكون الزاوية $\widehat{DJE}$ حادة، ولكن $2EW > EJ$ ، فيكون إذاً: $WE > WJ$ وَ $DE > DJ$. وهكذا يكون معنا في جميع الحالات: $DE > DJ$.

يكون معنا إذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{ND}{DJ}$؛ ولكن: $\frac{DG}{DB} = \frac{ND}{DJ}$ ، فيكون إذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{GD}{DB}$.

يكون معنا، في الحالة ٢): $d_1 > EH$ ، فينتج عن ذلك أنّ: $2EW > EF$ ، فتظهر لـِ: EF ثلاثة خيارات (كما كان لـِ EJ ، في الحالة ١)):

$EW = EF$، $EW > EF$، $EW < EF < 2EW$.

ونبيِّن في الحالات الثلاث أنَّ: $DF < DE$؛ ولكنَّ الزاوية $\widehat{DXF}$ منفرجة، فيكون: $DX < DF$ ، ويكون معنا إذاً: $DX < DE$ ، وبالتالي: $\frac{ND}{DE} > \frac{ND}{DX}$. ولكن: $\frac{GD}{DB} = \frac{ND}{DX}$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{GD}{DB}$.

لقد بيّنّا إذاً، في الحالة (ت)، أنّه إذا كان $d_2 < d_1$ و $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{EH}{HJ}$ ، يكون عندئذ:

$CK = ND$ أو $\frac{CD}{DG} \leq \frac{CK}{ND}$ وَ $\frac{GD}{DB} < \frac{ND}{DE}$.

ولكن $KI = DE$ ، فيكون إذاً:

* إذا كان: $CK = ND$، يكون معنا: $\frac{CK}{KI} = \frac{ND}{DE}$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{CK}{KI} > \frac{GD}{DB}$، وبما أنَّ $CD > DG$، يكون معنا إذاً: $\frac{CK}{KI} > \frac{CD}{DB}$.

* إذا كان: $\frac{CD}{DG} \leq \frac{CK}{ND}$ وَ $\frac{GD}{DB} < \frac{ND}{DE}$، يكون عندئذ: $\frac{CD}{DB} < \frac{CK}{DE}$، ويكون إذاً: $\frac{CK}{KI} > \frac{CD}{DB}$.

وهكذا نحصل، في جميع الحالات، على: $\frac{DB}{DE} > \frac{CD}{CK}$ ، فنستنتج من ذلك أنَّ:

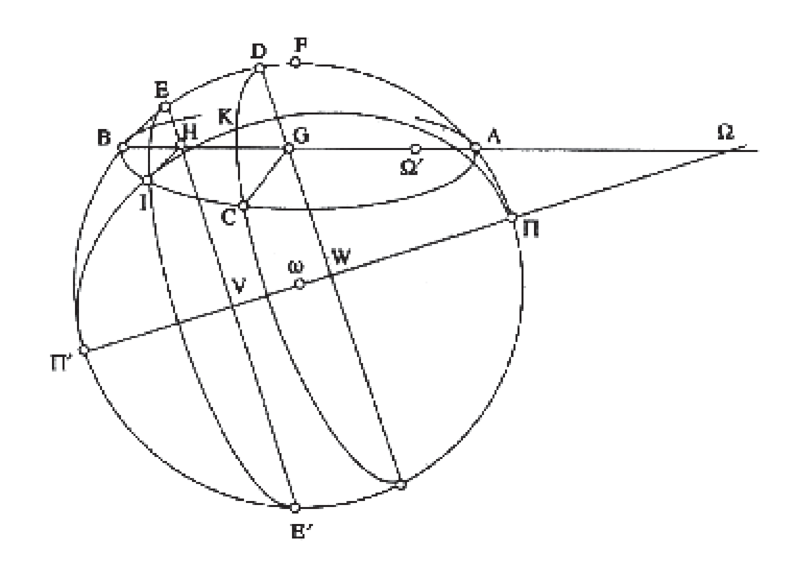
أو $\frac{\widehat{DB}}{\widehat{DE}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{CK}}$ ؛ $\frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} < \frac{\widehat{CK}}{\widehat{DE}}$ ؛ ولكن $\widehat{DE} = \widehat{KI}$ ، فنحصل على: $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}}$ ؛ فنستنتج أنّ:

$\frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} > \frac{\widehat{CD}-\widehat{CK}}{\widehat{BD}-\widehat{DE}}$ [١١]، أي أنّ: $\frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} > \frac{\widehat{KD}}{\widehat{EB}}$ ؛ ولكنّ: $\widehat{KD} > \widehat{EI}$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} > \frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}}$.

شرح:

يدرس ابن الهيثم أيضاً، في هذه القضية، تغيُّرَ نسبةٍ في حالة مُعقّدة. يتعلّق الأمر بإثبات ما يلي:

١) إنَّ النسبة $\frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}}$ تتناقص عندما تنتقل E من B نحو F على دائرة نصف النهار AEB (F هي وسط القوس $\widehat{BA}$)؛



الشكل ٤٦

٢) إنَّ $\frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} \leq \frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$، حيث تكون K نقطةَ تقاطع الدائرة DKC (الموازية مثل EI لدائرة معدّل النهار) مع دائرة نصف النهار ΠKI التي تمرّ بالنقطة I (الشكل ٤٦).

لنضع $\psi = \widehat{EVI}$ وَ $\theta = \widehat{E\omega F}$ (θ محسوبة بالاتجاه المعاكس للزاويتين α وَ β)،

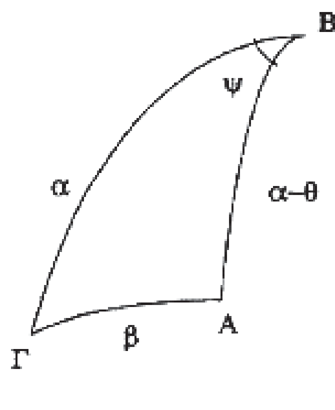
فيكون معنا: $\alpha - \theta = \widehat{\Pi\omega E}$ ، فنستنتج أنَّ:

$$\cos\psi = \frac{\overline{VH}}{\overline{EV}} = \frac{z}{r\sin(\alpha-\theta)} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)} \qquad (1)$$

[١١] انظر الحاشية ٩ أعلاه.

حيث تكون z الإحداثية الثالثة للنقطة H (α هي الزاوية المتمّمة لعرض F، وَ $\widehat{A\omega F} = \beta$، انظر شرح القضيتين ١١ وَ ١٢).

إذا كان : $\frac{\pi}{2} = \alpha$، يكون $\cos\psi = \frac{\cos\beta}{\cos\theta}$؛ وإذا كان $\frac{\pi}{2} = \beta$، يكون: $\cos\psi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha-\theta)}$



الشكل ٤٧

يكون معنا: $-\beta \leq \theta \leq \operatorname{Inf}(2\alpha - \beta, \beta)$[١٢]، أي أنّ $|\alpha - \beta| \leq \alpha - \theta \leq \alpha + \beta$، فلذلك يوجَد، على الكرة ذات نصف القطر ١، مُثلَّثٌ ذو الأضلاع α، β وَ $(\alpha$-$\theta)$؛ والمعادلة (1) تعني أنّ ψ هي الزاوية المقابلة للضلع β في هذا المثلث $AB\Gamma$ (انظر الشكل ٤٧).

ويكون معنا، بما أنّ $\widehat{EI} = r\,\psi \sin(\alpha - \theta)$ وَ $\widehat{EB} = r(\beta + \theta)$:

$$\xi = \frac{\psi}{\beta+\theta}\sin(\alpha-\theta) = \frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}} \quad (2)$$

ويكون معنا أيضاً من جهة أخرى، إذا كان $\widehat{DWC} = \Psi$ وَ $\widehat{D\omega F} = \Theta$،

$$\widehat{DK} = r\,\psi \sin(\alpha - \Theta), \quad \widehat{DC} = r\,\Psi \sin(\alpha - \Theta)$$

فنحصل على:

$$\widehat{CK} = r(\Psi - \psi)\sin(\alpha - \Theta); \quad \widehat{KI} = \widehat{DE} = r(\Theta - \theta),$$

[١٢] تدلُّ Inf على أصغر العددين الموجودين بين القوسين. (المُترجِم)

بحيث يكون:

$$\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}}=\frac{\Psi-\psi}{\Theta-\theta}\sin(\alpha-\Theta) \text{ وَ } \frac{\overset{\frown}{DC}}{\overset{\frown}{DB}}=\frac{\Psi}{\beta+\Theta}\sin(\alpha-\Theta) .$$

وهكذا تُكتب المتباينة $\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} \geq \frac{\overset{\frown}{DC}}{\overset{\frown}{DB}}$ ، الخاصة بالحالة ٢)، على الشكل التالي:

$\frac{\Psi-\psi}{\Theta-\theta} \geq \frac{\Psi}{\beta+\Theta}$، وهذا ما يعادل: $\frac{\psi}{\beta+\theta} \leq \frac{\Psi}{\beta+\Theta}$، لأنَّ $\frac{a-c}{b-d} \geq \frac{a}{b}$ تُكتب على الشكل التالي:

$$ab-ad \geq ab-bc ،$$

أيّ أنّ $bc \geq ad$ أو $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

وإذا وضعنا:

$$\eta=\frac{\psi}{\beta+\theta} ، \qquad (3)$$

حيث تـُعرَّف ψ بالمعادلة (1)، نجد أنّ المتباينة الواردة في الحالة ٢) تعني أنَّ η دالة تناقصية للمتغيِّر θ.

ملاحظتان:

1) تناول ابن الهيثم نِسَباً بين أقواس دوائر(ذات أنصاف أقطار مختلفة) بدلاً من النسب بين الزوايا. ولذلك لم يكن بإمكانه عرض النتيجة ٢) على شكل تناقصيَّة الدالة η. وإذا استخدمنا رموز ابن الهيثم، تـُؤدّي التحويلة المستخدَمة إلى:

$$\frac{\overset{\frown}{DK}}{\overset{\frown}{BE}} \leq \frac{\overset{\frown}{DC}}{\overset{\frown}{DB}} .$$

2) يكون معنا $\xi=\eta\sin(\alpha-\theta)$ ؛ وإذا كان $\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2}$ ، فإنّ $sin\ (\alpha-\theta)$ دالـّة تناقصية للمتغيِّر θ، فتكون ١) ناتجة من ٢). وإذا كان، بعكس ذلك، $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$، فإنَّ $\sin\ (\alpha-\theta)$ تتزايد في الفسحة: $-\beta\leq\theta\leq\alpha-\frac{\pi}{2}$ ، ثم تتناقص في الفسحة التالية:

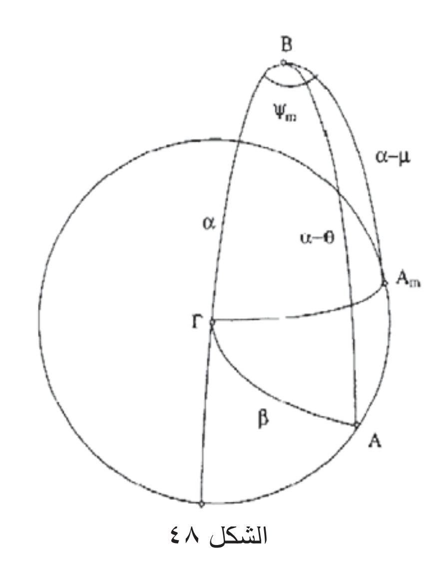
$$\alpha-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq Inf(\beta,2\alpha-\beta) .$$

وهكذا تكون ٢) ناتجة من ١) في الفسحة الأولى وتكون ١) ناتجة من ٢) في الفسحة الثانية.

القسم الأول: دراسة الزاوية ψ

لنُثَبِّت القوس $\widehat{B\Gamma} = \alpha$ على الكرة ذات نصف القطر ١؛ الرأس الثالث A للمثلث $AB\Gamma$ هو نقطة تقاطع الدائرة ذات المركز Γ ونصف القطر β، مع الدائرة ذات المركز B ونصف القطر $(\alpha - \theta)$ الذي يتغيَّر في الفسحة $[|\alpha - \beta|, \alpha + \beta]$. يجب التمييز بين حالتين وفقاً للمتباينة $\alpha \geq \beta$ أو للمتباينة $\alpha < \beta$ ؛ في الحالة الأولى، B هي خارج الدائرة γ ذات المركز Γ ونصف القطر β (وتكون B على هذه الدائرة إذا كان $\alpha = \beta$) بينما تكون في الحالة الثانية داخل هذه الدائرة.

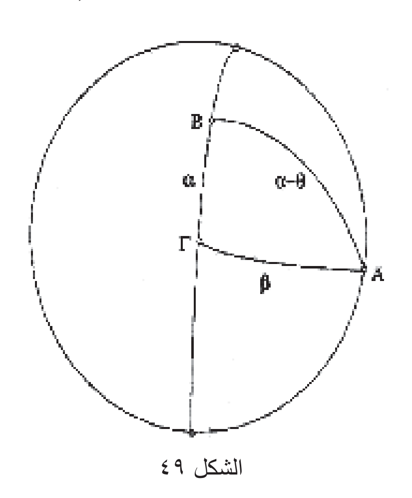
١) الحالة $\alpha \geq \beta$: توجد دائرة عظمى مارة بالنقطة B ومماسَّة للدائرة γ على نقطة A_m.
وعندما تتزايد θ من ($-\beta$) إلى β، تتناقص $(\alpha - \theta)$ من $\alpha + \beta$ إلى $\alpha - \beta$، وتتزايد الزاوية $\psi = \widehat{\Gamma BA}$ من 0 إلى $\widehat{\Gamma BA_m} = \psi_m$ (بين 0 وَ $\frac{\pi}{2}$)، ثم تتناقص من ψ_m إلى 0.
ويكون لدينا، بما أنَّ $\widehat{BA_m\Gamma} = \frac{\pi}{2}$، وباستخدام حساب المثلثات الكروية: $\frac{\sin\psi_m}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha}$، أي أنّ $\sin\psi_m = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (انظر الشكل ٤٨) وتبلغ ψ هذه القيمة عندما يكون $\cos(\alpha - \theta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos\mu$ ، أيْ عندما يكون: $\alpha - \mu = \theta$ $(0 \leq \mu < \alpha)$. إذا كان $\alpha = \beta$، يكون $\mu = 0$ وَ $\psi_m = \frac{\pi}{2}$ ؛ ويكون معنا، في الحالات الأخرى، $\alpha - \mu < \beta$ وَ $\psi_m < \frac{\pi}{2}$.



الشكل ٤٨

توجد قيمتان ممكنتان $\theta_+(\psi)$ وَ $\theta_-(\psi)$ لكل قيمة معلومة للمتغيّر $\psi \in [0, \psi_m[$، بحيث يكون: $\theta_-(\psi) < \alpha - \mu < \theta_+(\psi)$.

٢) الحالة $\beta < \alpha$. إنَّ $\alpha - \theta$ تتناقص من $\alpha + \beta$ إلى $\alpha - \beta$ وَ ψ تتزايد من 0 إلى π ، عندما تتزايد θ من $(-\beta)$ إلى $(2\alpha-\beta)$. ولكل قيمة معلومة للمتغيِّر $\psi \in [0, \pi]$، توجد قيمة واحدة ممكنة $\theta_-(\psi) \in [-\beta ، 2\alpha-\beta]$ ، لأنَّ $0 \leq \alpha - \theta$ (انظر الشكل ٤٩).



الشكل ٤٩

ملاحظتان:

١- الإحداثية الأولى، للنقطة Ω، المحسوبة على طول الخط BA ابتداء من منتصفه هي: $r \cos\beta \,\mathrm{tg}\, \alpha$، وهي أكبر من $r \sin\alpha = \frac{1}{2} BA$ في الحالة الأولى $(\alpha \geq \beta)$، وهذا يعني أنَّ Ω خارج الكرة. الإحداثية الأولى للنقطة H :

$$\frac{r}{\sin\alpha}\left(\cos(\alpha-\theta)-\cos\alpha\cos\beta\right)$$

تصبح مساوية لـِ $\frac{r\sin^2\beta}{\mathrm{tg}\alpha\cos\beta}$ ، عندما يكون $\alpha-\mu=\theta$ ؛ ويكون عندئذ موضع H في النقطة Ω' التي هي النقطة المُرفقة التوافقية للنقطة Ω بالنسبة إلى لنقطتين A وَ B (الشكل ٤٦).

٢- تكون قيمة ψ، في الحالة الثانية $(\alpha<\beta)$، مساوية لِـ $\frac{\pi}{2}$ عندما يكون $\alpha-\mu'=\theta$، حيث يكون $\cos\mu'=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$، أي عندما تكون H في Ω ؛ ويكون معنا : $\mu'\le\alpha$ إذا كان: $\cos\beta\ge\cos^2\alpha$ ، أي إذا كان $\sin\alpha\ge\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}$.

نحن بحاجة، فيما بعد، لدراسة تحدُّب ψ كدالة للمتغيِّر θ. نجد إذا اشتققنا (1):

$$\psi'\sin\psi=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin^2(\alpha-\theta)}, \qquad (4)$$

حيث يكون $\psi'=\frac{d\psi}{d\theta}$.

ملاحظات:

١- إذا كان $\alpha=\beta$ (Ω في A)، يمكن أن نُبسِّط (4) باختزال الكمية $2\sin^2\frac{\alpha-\theta}{2}$ فنحصل على: $\psi'\sin\psi=\frac{1}{2\mathrm{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha-\theta}{2}}$.

٢- إذا كان $\theta=-\beta$ ، يكون $\psi=0$ وَ $\psi'\sin\psi=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$ ، فنستنتج أنّ: $\psi'=+\infty$. إذا كان: $\theta=\mathrm{Inf}(\beta,\ 2\alpha-\beta)$ وَ $\beta\neq\alpha$، يكون: $\psi=0$ أو π وَ $\psi'\sin\psi=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}$ ، فنستنتج أنّ: $\psi'=$ [إشارة $(\beta-\alpha)$. ∞]. إذا كان: $\alpha=\beta$ وَ $\theta=\alpha$، يكون: $\psi=\frac{\pi}{2}$ وَ $\psi'=\frac{1}{2\mathrm{tg}\alpha}$. إذا كان $\theta=-\beta+u$ ، يكون : $\psi^2\approx\frac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$ عندما يقترب u من 0.

وكذلك إذا كان: $\theta=\mathrm{Inf}(\beta,2\alpha-\beta)-u$ (مع $\alpha\neq\beta$) وَ $\psi=\nu$ أو $\pi-\nu$ على التوالي وفقاً للحالة: $\alpha>\beta$ أو للحالة $\alpha<\beta$ ، نجد أنَّ: $\nu^2\approx\frac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin|\alpha-\beta|}$.

٣- إذا كان: $\alpha-\mu'=\theta$ ، نجد أنَّ: $\psi'\sin\psi=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

إذا اشتققنا (4) نحصل على:

$$\frac{2\cos\alpha\cos(\alpha-\theta)-\cos\beta\left(1+\cos^2(\alpha-\theta)\right)}{\sin\alpha\sin^3(\alpha-\theta)}=\psi''\sin\psi+\psi'^2\cos\psi \qquad (5)$$

لنضع: $\cos\alpha=A$ ، $\cos\beta=B$ وَ $X=\cos(\alpha-\theta)$ ؛ يكون معنا:

$$\cos\psi=\frac{B-AX}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)} \qquad (1')$$

$$\psi'\sin\psi=\frac{A-BX}{\sin\alpha\sin^2(\alpha-\theta)} \qquad (4')$$

$$\left(\psi''\sin\psi+\psi'^2\cos\psi\right)\sin\alpha\sin^3(\alpha-\theta)=2AX-B\left(1+X^2\right) \qquad (5')$$

نحصل من (1') على:

$$\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi}=\frac{B-AX}{\left(1-A^2\right)\left(1-X^2\right)-(B-AX)^2}\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)$$

$$=\frac{B-AX}{1-A^2-B^2-X^2+2ABX}\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)$$

فتعطينا المعادلة (4') عندئذ:

$$\psi'^2\cos\psi\sin\alpha\sin^3(\alpha-\theta)=\frac{(A-BX)^2(B-AX)}{1-A^2-B^2-X^2+2ABX}.$$

ويكون معنا في النهاية:

$$\psi''\sin\psi\sin\alpha\sin^3(\alpha-\theta)=2AX-B\left(1+X^2\right)-\frac{(A-BX)^2(B-AX)}{1-A^2-B^2-X^2+2ABX}=\frac{P(X)}{Q(X)} \qquad (6)$$

مع:

$$P(X)=BX^4-A\left(B^2+2\right)X^3+3A^2BX^2-A\left(A^2+2B^2-2\right)X+B^3-B \qquad (6')$$

وَ

$$Q(X)=1-A^2-B^2-X^2+2ABX\geq 0.$$

إنّ إشارة "ψ هي إشارة $P(X)$ التي سندرسها عندما يكون :

$\cos(\alpha+\beta) \le X \le \cos(\alpha-\beta)$.

يكون معنا:

$$P(\cos(\alpha\pm\beta)) = \cos\beta\cos^4(\alpha\pm\beta) - \cos\alpha\cos^2\beta\cos^3(\alpha\pm\beta) -$$
$$-2\cos\alpha\cos^3(\alpha\pm\beta) + 3\cos^2\alpha\cos\beta\cos^2(\alpha\pm\beta) +$$
$$+2\cos\alpha\sin^2\beta\cos(\alpha\pm\beta) - \cos^3\alpha\cos(\alpha\pm\beta) - \cos\beta\sin^2\beta =$$
$$= -\sin^2\beta\sin\alpha\sin^3(\alpha\pm\beta)$$

وهكذا يكون: $P(\cos(\alpha+\beta)) < 0$ ، فتكون إشارة $P(\cos(\alpha-\beta))$ هي إشارة $\alpha-\beta$ (التي تنعدم عندما يكون $\alpha=\beta$).

إنّ حساب الاشتقاق يعطينا:

$$P'(X) = 4BX^3 - 3A(B^2+2)X^2 + 6A^2BX - A(A^2+2B^2-2)$$

وَ

$$P''(X) = 6\left(2BX^2 - A(B^2+2)X + A^2B\right) = 6(2X-AB)(BX-A)$$ ؛

$$P'(\cos(\alpha\pm\beta)) = 4\cos\beta\cos^3(\alpha\pm\beta) - 3\cos\alpha\cos^2\beta\cos^2(\alpha\pm\beta)$$
$$-6\cos\alpha\cos^2(\alpha\pm\beta) + 6\cos^2\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta) + 2\cos\alpha\sin^2\beta - \cos^3\alpha$$
$$= \frac{5}{2}\sin^2\beta\sin(\alpha\pm\beta)\left(\sin(2\alpha\pm\beta) \mp \frac{3}{5}\sin\beta\right)$$

وهكذا فإنَّ $P'(\cos(\alpha+\beta)) > 0$ تعادل $\sin(2\alpha+\beta) > \frac{3}{5}\sin\beta$. إذا كان $\alpha > \beta$، يكون $P'(\cos(\alpha-\beta)) > 0$، وإذا كان $\alpha = \beta$، يكون $P'(1) = 0$ ؛ وإذا كان $\alpha < \beta$ ، فإنَّ: $0 < P'(\cos(\alpha-\beta))$ تعادل $\sin\beta \frac{3}{5} < \sin(\beta-2\alpha)$.

ملاحظة: إنَّ لدينا: $\sin(\beta+2\alpha) - \sin(\beta-2\alpha) = 2\cos\beta\sin 2\alpha \ge 0$، فلذلك تكون المتباينة:

$\sin(\beta-2\alpha) > \frac{3}{5}\sin\beta$ متضمِّنة للمتباينة: $\sin(\beta+2\alpha) > \frac{3}{5}\sin\beta$.

المشتقّة الثانية $P''(X)$ تكون سالبة في الفسحة: $\frac{AB}{2} \le X \le \frac{A}{B}$ ، وتكون موجِبة في خارجها.

يكون معنا:

$$P'\left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{A^3B^4}{2} - \frac{3A^3B^4}{4} + \frac{3}{2}A^3B^2 - 2AB^2 - A^3 + 2A$$
$$= \frac{A}{4}\left(A^2B^2\left(2-B^2\right) + 4\left(2-A^2\right)\left(1-B^2\right)\right) > 0$$

وتكون إشارة العبارة:

$$P'\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{4A^3}{B^2} - 3A^3 - \frac{6A^3}{B^2} + 6A^3 - 2AB^2 - A^3 + 2A = \frac{2A}{B^2}\left(1-B^2\right)\left(B^2-A^2\right)$$ ،

مطابقة لإشارة α-β (التي تنعدم عندما يكون $\alpha = \beta$).

لنلاحظ أنَّ: $\frac{A}{B} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} > \cos(\alpha+\beta)$ وَ $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta < \cos(\alpha-\beta)$

لأنَّ $0 < \sin\alpha\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

والمتباينة: $\frac{AB}{2} \ge \cos(\alpha+\beta)$ (أو على التوالي: $\frac{A}{B} \le \cos(\alpha-\beta)$) تُكتب:

$\cos\alpha\cos\beta \ge 2\cos(\alpha+\beta)$ ، أيْ $3\cos(\alpha+\beta) \le \cos(\alpha-\beta)$

(أو على التوالي $\cos\alpha \le \cos\beta\cos(\alpha-\beta)$ ، أيْ $\sin\beta\sin(\alpha-\beta) \ge 0$ أو أيضاً $\alpha \ge \beta$).

ملاحظة: إذا كان: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، يكون: $\frac{AB}{2} = \frac{A}{B} = 0$ ، وتكون $0 \le P''(X)$ لقيم X الأخرى. إذا كان $\alpha = \beta$، يكون: $\cos(\alpha-\beta) = 1 = \frac{A}{B}$ ، وتُصبح المتباينة: $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\beta) \le \frac{AB}{2}$ معادلة لِـ $\cos 2\alpha \le \frac{1}{3}$، أي أنَّ $0,615479709 \le \alpha$ (وهذا العدد أصغر بقليل من $\frac{\pi}{5}$). إذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$، يكون: $\frac{AB}{2} = 0$ وَ $\frac{A}{B} = +\infty$.

إنَّ لدينا أربع حالات:

١) $\alpha \ge \beta$ وَ $3\cos(\alpha+\beta) \le \cos(\alpha-\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\cos(\alpha+\beta) \le \frac{AB}{2} < \frac{A}{B} \le \cos(\alpha-\beta)$$

يكون معنا: $\cos\mu = \frac{A}{B}$ ونضع $\cos\nu = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta$؛ فنرى أنَّ $0 \ge P''(X)$، إذا كان: $\alpha - \nu \le \theta \le \alpha - \mu$ ، وأنَّ $0 < P''(X)$، إذا كان غير ذلك. ولنلاحظ أنَّ $\nu > \alpha$.

٢) $\alpha \ge \beta$ وَ $\cos(\alpha-\beta) < 3\cos(\alpha+\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\frac{AB}{2} < \cos(\alpha+\beta) < \frac{A}{B} \le \cos(\alpha-\beta)،$$

ويكون $0 \ge P''(X)$، إذا كان: $-\beta \le \theta \le \alpha - \mu$ ، أي أنَّ: H بين B وَ Ω' .

٣) $\beta > \alpha$ وَ $3\cos(\alpha+\beta) \le \cos(\alpha-\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\cos(\alpha+\beta) \le \frac{AB}{2} < \cos(\alpha-\beta) < \frac{A}{B}،$$

ويكون $0 \ge P''(X)$، إذا كان: $\alpha - \nu \le \theta \le 2\alpha - \beta$.

٤) $\beta > \alpha$ وَ $\cos(\alpha-\beta) < 3\cos(\alpha+\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\frac{AB}{2} < \cos(\alpha+\beta) < \cos(\alpha-\beta) < \frac{A}{B}،$$

فتبقى $P''(X)$ دائماً سالبة.

وهذه هي جداول تغيرات $P'(X)$ في الحالات الأربع:

1)

X	$\cos(\alpha+\beta)$		$\frac{AB}{2}$		$\frac{A}{B}$		$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$	$P'(\cos(\alpha+\beta))$	↗	+	↘	+	↗	+

2)

X	$\cos(\alpha+\beta)$		$\frac{A}{B}$		$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$	$P'(\cos(\alpha+\beta))$	↘	+	↗	+

3) X	$\cos(\alpha+\beta)$	$\frac{AB}{2}$	$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$	$P'(\cos(\alpha+\beta))$ ↗	+	↘ $P'(\cos(\alpha-\beta))$

4) X	$\cos(\alpha+\beta)$	$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$	↘	$P'(\cos(\alpha-\beta))$

تبقى $P'(X)$، في الحالة الأولى، موجبةً إذا كان: $P'(\cos(\alpha+\beta)) \geq 0$، أي إذا كان: $\sin(2\alpha+\beta) \geq \frac{3}{5}\sin\beta$؛ وتمرّ $P'(X)$ من القِيَم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_1 = \cos(\alpha-\theta_1) \ni [\cos\alpha\cos\beta \; , \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)]$، أيْ أنَّ $-\beta < \theta_1 < \alpha - \nu$ إذا كان: $\sin(2\alpha+\beta) < \frac{3}{5}\sin\beta$.

ملاحظة: إذا كان $\alpha = \beta$، فإنَّ المتباينة $\sin 3\alpha < \frac{3}{5}\sin\alpha$ تعادل: $\sin\alpha > \sqrt{\frac{3}{5}}$ ، أيْ أنَّ:

$\alpha > 0,886077124$ (وهذا العدد يوجَد بين $\frac{\pi}{4}$ وَ $\frac{\pi}{3}$).

تبقى $P'(X)$ موجبة دائماً في الحالة ٢). وتبقى $P'(X)$ موجبة في الحالة ٣) ، إذا كان $\sin(\beta-2\alpha) \geq \frac{3}{5}\sin\beta$؛ وإذا كان $\sin(\beta-2\alpha) < \frac{3}{5}\sin\beta \leq \sin(\beta+2\alpha)$، يكون $P'(\cos(\alpha+\beta)) \geq 0$ وَ $P'(\cos(\alpha-\beta)) < 0$ ؛ ولذلكَ تمرّ $P'(X)$ من القِيَم الموجبة إلى القيم السالبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_2 = \cos(\alpha-\theta_2)$ ، مع $\alpha - \nu < \theta_2 < 2\alpha - \beta$. وأخيراً، إذا كان $\sin(\beta+2\alpha) < \frac{3}{5}\sin\beta$ ، يكون $P'(\cos(\alpha \pm \beta)) < 0$ ، فتمرّ $P'(X)$ من القِيَم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_1 = \cos(\alpha-\theta_1)$ ، مع $-\beta < \theta_1 < \alpha - \nu$ ، ثم تمرّ من القيم الموجبة إلى القيم السالبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_2 = \cos(\alpha-\theta_2)$ ، مع $\alpha - \nu < \theta_2 < 2\alpha - \beta$.

تبقى $P'(X)$ موجبة، في الحالة ٤)، إذا كان $\sin(\beta-2\alpha)\geq\frac{3}{5}\sin\beta$ كما يجري في الحالة ٣)، وإذا كان $\sin(\beta-2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta\leq\sin(\beta+2\alpha)$، تمرّ $P'(X)$ من القيم الموجبة إلى القيم السالبة عندما يكون X مساوياً لِـ $\cos(\alpha-\theta_2)=X_2$، مع $\alpha-\nu<\theta_2<2\alpha-\beta$. وأخيراً، إذا كان: $\sin(\beta+2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta$، تبقى $P'(X)$ سالبة، ولكن يُمكن أن نتحقَّق أنَّ هذا لا يحدث، لأنَّه متناقض مع المتباينة $3\cos(\alpha+\beta)>\cos(\alpha-\beta)$.

ونرى أنَّ $P(X)$، في الحالتين ١) و٢) الموافقتين للمتباينة $\alpha\geq\beta$، تبلغ وهي تزايدية $P(\cos(\alpha-\beta))\leq 0$، فتبقى $P(X)$ سالبة وتكون ψ دالة مُقعَّرة للمتغيِّر θ.

أما في الحالتين ٣) و ٤) الموافقتين للمتباينة $\alpha<\beta$، فإنَّ $P(X)$ تتزايد من $P(\cos(\alpha+\beta))<0$ إلى $P(\cos(\alpha-\beta))>0$، إذا كان $\sin(\beta-2\alpha)\geq\frac{3}{5}\sin\beta$؛ لذلك تمرّ $P(X)$ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لِـ $\cos(\alpha-\theta_0)=X_0$.

ونرى أنَّ $\alpha-\nu\leq\theta_0<2\alpha-\beta$، لأنَّ:

$$P\left(\frac{AB}{2}\right)=\frac{A^4B^5}{16}-\frac{A^4B^3}{8}\left(B^2+2\right)+\frac{3A^4B^3}{4}-\frac{A^2B}{2}\left(A^2+2B^2-2\right)+B^3-B$$

$$=-\frac{A^4B^5}{16}-\frac{B}{2}\left(1-B^2\right)\left(\left(1-A^2\right)^2+1\right)\leq 0 \quad .$$

إذا كان $\sin(\beta-2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta\leq\sin(\beta+2\alpha)$، تبلغ $P(X)$، وهي تناقصية القيمة $P(\cos(\alpha-\beta))>0$، بعد أن تكون تزايدية في الفسحة $-\beta\leq\theta\leq\theta_2$؛ وهكذا تمرّ $P(X)$ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لِـ $\cos(\alpha-\theta_0)=X_0$، كما حصل في الحالة السابقة. ويكون معنا: $\alpha-\nu\leq\theta_0<\theta_2$. وأخيراً، إذا كان $\sin(\beta+2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta$، فإنَّ $P(X)$ تتزايد فقط في الفسحة: $X_1\leq X\leq X_2$ وتمرّ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لِـ $\cos(\alpha-\theta_0)=X_0$، مع $\alpha-\nu\leq\theta_0<\theta_2$ كما حصل أعلاه.

ومجمل القول هو أنَّ ψ دالة مُقعَّرة إذا كان $\alpha \geq \beta$ ؛ أما إذا كان، بعكس ذلك، $\alpha > \beta$،
فإنَّ ψ تكون مقعَّرة في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_0$ ، وتكون محدَّبة في الفسحة $\theta_0 \leq \theta \leq 2\alpha - \beta$.
والزاوية θ_0 محدَّدة بالمعادلة $P(\cos(\alpha - \theta_0)) = 0$. ويكون معنا:

$$\frac{B}{A} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \cos\mu' \text{ وَ } 0 \leq \frac{B(1-A^2)(B^2-A)^2}{A^4} = P\left(\frac{B}{A}\right) \text{ ؛}$$

وهذا يُبيِّن أنَّ: $\cos(\alpha - \theta_0) \geq \cos\mu'$ ، أي أنَّ: $\theta_0 \leq \alpha - \mu'$.

ملاحظة: إذا كان $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ، يكون $X = \cos(\alpha - \theta) = 0$

وَ $P(X) = B^3 - B \leq 0$، وهذا ما يُثبت أنَّ: $\theta_0 \leq \alpha - \frac{\pi}{2}$.

وهكذا يتم المرور، على نقطة انحراف الخط البياني للدالّة ψ، قبل أن يبلغ المتغيرُ θ القيمةَ $\frac{\pi}{2}$. وإذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$ يكون $\theta_0 = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

إذا كان $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$، يكون $\theta_0 < 2\alpha - \beta \leq 0$. إذا كان $\alpha > \frac{\beta}{2}$ ، فإنَّ المتباينة: $\theta_0 \geq 0$
تعادل $P(\cos\alpha) \leq 0$ أيْ :

$$(3 - B)A^4 - 2(1 + B)A^2 + B(1 + B) \geq 0 \qquad (7)$$ ،

لأنَّ:

$$P(\cos\alpha) = B^3 - B + A^2(A^2 + 2B^2 - 2) - 3A^4B + A^4(B^2 + 2) - A^4B$$
$$= (B - 1)((3 - B)A^4 - 2(1 + B)A^2 + B(1 + B)) .$$

لنضع: $\Pi(x) = (3 - B)x^2 - 2(1 + B)x + B(1 + B)$ ؛
فيكون :

$$\Pi(1) = (1 - B)^2 > 0 \text{ وَ } \Pi\left(\cos^2\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1+B}{4}(1-B)^2 < 0$$

وَ

$$\Pi(\cos^2\beta) = B(1 - B)^2(1 + B - B^2) > 0$$ ،

فيكون إذاً لمتعددة الحدود Π جذرٌ بين $\cos^2\beta$ وَ $\cos^2\frac{\beta}{2}$ وجذر آخر بين $\cos^2\frac{\beta}{2}$ وَ 1 .

إذا فرضنا $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$ ، فإنَّ الشرط (7) يعادل :

$$A^2 = \cos^2\alpha \leq \frac{1+B-(1-B)\sqrt{1+B}}{3-B} = \cos\frac{\beta}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{1+\sin^2\frac{\beta}{2}} \text{ ،}$$

أيْ أنَّ : $\alpha \geq \alpha_1(\beta)$، حيث تُحدَّد $\alpha_1(\beta)$ بواسطة المعادلة:

$$\cos^2\alpha_1(\beta) = \cos\frac{\beta}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{1+\sin^2\frac{\beta}{2}} \qquad (8)$$

أو

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha_1(\beta) = \frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\,\frac{\left(2+\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ ،}$$

وهذا ما يبيّن أنّ α_1 تزايدية.

ونرى أنَّ: $\alpha_1(0) = 0$ ، وإذا كان المتغيِّر β قريباً من الصفر، يكون معنا:

$$\alpha_1(\beta)^2 \approx \frac{\beta^2}{4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\beta^2}{4}\left(2+\sqrt{2}\right) \text{ ،}$$

أيْ أنَّ:

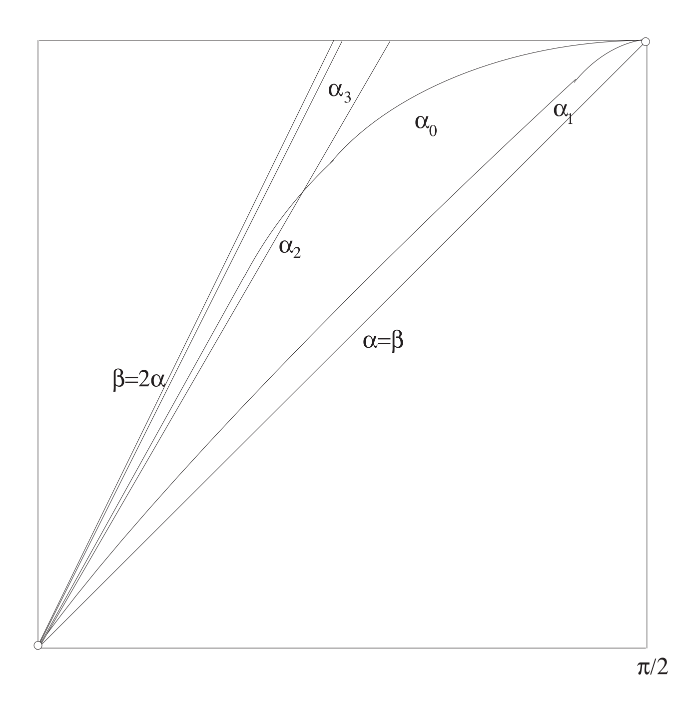
$$\alpha_1(\beta) \approx \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\beta \text{ ،}$$

أو

$$\beta \approx \alpha_1(\beta)\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

مع $\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)} = 1{,}17157288$ وَ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 0{,}923879533$.

إذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$، يكون معنا $\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$، فإذا وضعنا: $\beta = \frac{\pi}{2} - v$ وَ $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - u$، يكون معنا: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 u}$، فنستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{v}{2} \approx u^2$ وَ $0 = \left.\frac{d\beta}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=\frac{\pi}{2}}$ (انظر الشكل ٥٠).



الشكل ٥٠

القسم الثاني : دراسة $\eta = \frac{\psi}{\beta+\theta}$

يكون معنا: $\eta' = \frac{(\beta+\theta)\psi' - \psi}{(\beta+\theta)^2}$، فإشارة هذه المشتقّة هي إشارة $[(\beta+\theta)\psi' - \psi]$. إذا كان:

$\theta = -\beta + u$، نحن نعلم أنَّ $\psi \approx C\sqrt{u}$ عندما تقترب u من 0، مع $C = \sqrt{\frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}}$،

فتقترب إذاً $\eta = \frac{\psi}{\beta+\theta} \approx \frac{C}{\sqrt{u}}$ من $+\infty$ عندما تقترب θ من $-\beta$، لأنَّ $u = \beta + \theta$. ونحن نعلم، وفقاً لِـ (4) أنَّ: $\sin\psi\ \psi'$ تقترب من $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} = \frac{C^2}{2}$، فيكون إذاً:

$$\psi' \approx \frac{C}{2\sqrt{u}} \text{ وَ } (\beta+\theta)\psi' - \psi \approx -\frac{C}{2}\sqrt{u} < 0 .$$

إنَّ مشتقَّة $\psi - (\beta+\theta)\psi'$ هي $(\beta+\theta)\psi''$ التي تطابق إشارتها إشارة ψ''؛ لذلك تتناقص $\psi - (\beta+\theta)\psi'$ وتبقى سالبة طالما دامت $\psi'' \geq 0$. فنستنتج أنَّ η تتناقص في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \beta$ في الحالة التي يكون فيها $\alpha \geq \beta$ وفي الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_0$ في الحالة التي يكون فيها $\alpha < \beta$.

لنضع $\theta = 2\alpha - \beta - u$ وَ $\psi = \pi - \nu$ ، إذا كان $\alpha < \beta$؛ لقد رأينا أنّ $\nu \approx C'\sqrt{u}$ عندما تقترب u من 0، مع:

$C' = \sqrt{\dfrac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}$ (انظر الملاحظة ٢، ص. ١٤٦).

الصيغة (4) تعطي:

$$\lim_{u\to 0}\psi'\sin\psi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\ \sin(\beta-\alpha)} = \frac{C'^2}{2}$$ ،

فيكون إذاً $\psi' \approx \dfrac{C'}{2\sqrt{u}}$ ، وبالتالي يكون: $\psi - (\beta+\theta)\psi' \approx 2\alpha\psi' \approx \dfrac{\alpha C'}{\sqrt{u}}$ ، وهذه العبارة تقترب من $+\infty$ عندما يقترب u من 0؛ وكذلك فإنَّ $\eta' \approx \dfrac{C'}{4\alpha\sqrt{u}}$ تقترب أيضاً من $+\infty$. وهكذا فإنَّ $\psi - (\beta+\theta)\psi'$ التي تتزايد في الفسحة $\theta_0 \leq \theta \leq 2\alpha - \beta$ ، تنعدم عندما تبلغ θ في هذه الفسحة قيمة هي θ_3 بحيث يكون $\alpha - \frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \theta_3$ (انظر الشكل ٦١)، ثم تصبح موجِبة.

وهكذا تتناقص η في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_3$ ثم تتزايد في الفسحة $\theta_3 \leq \theta \leq 2\alpha - \beta$.

وهكذا نرى أنَّ تناقصية η، عندما يكون $\theta \leq 0$ ، تتطلَّب أن يكون $\theta_3 \geq 0$. يكون معنا إذاً: $2\alpha - \beta > 0$ ، أي $\alpha > \dfrac{\beta}{2}$ ، فيجب أنْ تكون $\beta\psi'_0 - \psi_0$، التي هي قيمة $\psi - (\beta+\theta)\psi'$ عندما يكون $\theta = 0$ ، سالبة.

ولكن $\cos\psi_0 = \dfrac{\cos\beta - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 - 2\dfrac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\alpha}$ ، أيْ : $\sin\dfrac{\psi_0}{2} = \dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$

وَ : $\psi'_0\sin\psi_0 = \cos\alpha\dfrac{1-\cos\beta}{\sin^3\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^3\alpha}$ ،

فيُكتب الشرط $\beta\psi_0' \le \psi_0$ إذاً: $\beta\psi_0'\sin\psi_0 = 2\beta\dfrac{\cos\alpha\sin^2\dfrac{\beta}{2}}{\sin^3\alpha} = 2\beta\dfrac{\sin^2\dfrac{\psi_0}{2}}{\text{tg}\alpha} \ge \psi_0\sin\psi_0$

وهذا يعني أنَّ:

$$\frac{\beta}{\text{tg}\,\alpha} \le \frac{\psi_0}{\text{tg}\dfrac{\psi_0}{2}}. \qquad (9)$$

لنعرِّف دالة، هي $\alpha_2(\beta)$، بالمعادلة الضمنية: $\dfrac{\psi_0}{\text{tg}\dfrac{\psi_0}{2}} = \dfrac{\beta}{\text{tg}\,\alpha_2}$ $(\dfrac{\beta}{2} \le \alpha \le \beta)$؛ إنَّ $\dfrac{\beta}{\text{tg}\alpha}$ دالّة تناقصيّة للمتغيِّر α ، بينما تكون $\dfrac{\psi_0}{\text{tg}\dfrac{\psi_0}{2}}$ دالة تزايديّة للمتغيِّر α. إنَّ $\dfrac{\beta}{\text{tg}\alpha} - \dfrac{\psi_0}{\text{tg}\dfrac{\psi_0}{2}}$، بشكل أدقّ، تتزايد بالنسبة إلى المتغير β وتتناقص بالنسبة إلى المتغيّر α؛ فتكون النتيجة أنَّ α_2 تتزايد بالنسبة إلى المتغيِّر β وأن القول (ب) (الخاص بتناقصيّة η) صحيح إذا كان: $\alpha \ge \alpha_2(\beta)$. يكون معنا $\alpha_2(0) = 0$، عندما يكون $\beta = 0$، لأنَّ $\beta \ge \alpha_2(\beta)$. ويكون معنا، بالإضافة إلى ذلك، $\sin\dfrac{\psi_0}{2} \approx \dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{1}{2\lambda}$، مع: $\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta} = \lambda$؛ وهكذا يكون: $\text{tg}\dfrac{\psi_0}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{4\lambda^2-1}}$ وَ $\dfrac{1}{2\lambda\sqrt{4\lambda^2-1}}.tg\sqrt{4\lambda^2-1} = 1$ ، وهذا ما يعطي: $\lambda = 0{,}667618851$ أو $\left.\dfrac{d\beta}{d\alpha_2}\right|_{\alpha_2=0} = 1{,}49786064$. إذا كان: $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ ، يكون $\sin\dfrac{\psi_0}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\alpha}$، فنستنتج أنَّ:

$$\text{tg}\frac{\psi_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}،$$

وأنَّ $$\frac{\pi}{2\text{tg}\alpha_2} = 2\sqrt{-\cos 2\alpha_2}\,\text{Arc tg}\frac{1}{\sqrt{-\cos 2\alpha_2}}،$$

وهذا ما يعطي $\alpha_2 = 0{,}933682485$ (وهذا العدد أصغر قليلاً من $\dfrac{3\pi}{10}$)

وَ $\dfrac{\alpha_2}{\beta} = \dfrac{2\alpha_2}{\pi} = 0{,}594400731$.

ملاحظة: إذا جعلنا $\lambda\beta = \alpha_2$ في (9) ، تكون العبارة $\sin\frac{\psi_0}{2} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\lambda\beta}$ دالة تزايدية للمتغيِّر β،

وذلك لكل قيمة ثابتة لِـ λ مع $\lambda \geq \frac{1}{2}$ (القضية ٢)، فإذاً: $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi\lambda}{2}} \leq \sin\frac{\psi_0}{2} \leq \frac{1}{2\lambda}$.

ونستنتج، نظراً إلى أنَّ $\frac{\psi_0}{tg\frac{\psi_0}{2}}$ دالةٌ تناقصية للمتغير ψ_0، أنَّ:

$2\sqrt{4\lambda^2-1}\ \text{Arc tg}\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2-1}} \leq \frac{\psi_0}{\text{tg}\frac{\psi_0}{2}} \leq 2\sqrt{-\cos\pi\lambda}\ \text{Arc tg}\frac{1}{\sqrt{-\cos\pi\lambda}}$ ؛ وتكون $\frac{\beta}{\text{tg}\lambda\beta}$ ، من

ناحية أخرى، وهي دالة تناقصية للمتغيِّر β ، محصورةً بين $\frac{\pi}{2\text{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}$ وَ $\frac{1}{\lambda}$. يجب إذاً أن يكون

معنا: $\frac{1}{\lambda} \leq 2\sqrt{-\cos\pi\lambda}\ \text{Arc tg}\frac{1}{\sqrt{-\cos\pi\lambda}}$ ، وَ $2\sqrt{4\lambda^2-1}\ \text{Arc tg}\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2-1}} \leq \frac{\pi}{2\text{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}$ ؛

وهاتان المتباينتان تعادلان : $0,579590352 \leq \lambda \leq 0,706698767$.

ولكن، يُمكن أن نُثبِت أنَّ $\frac{\alpha_2}{\beta}$ دالة تناقصية للمتغيِّر β بحيث يكون:

$0,594 \leq \frac{\alpha_2}{\beta} \leq 0,668$ (انظر الشكل ٥٠).

القسم الثالث: دراسة $\xi = \frac{\psi}{\beta+\theta}\sin(\alpha-\theta)$

يكون معنا: $\xi = \frac{\overset{\frown}{EI}}{EH}.\frac{EH}{\overset{\frown}{EB}} = \frac{\cos\theta-\cos\beta}{(\beta+\theta)\sin\alpha}.\frac{\psi}{1-\cos\psi}$ ؛

وبما أنَّ العبارة $\frac{\cos\theta-\cos\beta}{\beta+\theta} = \frac{2\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\beta+\theta}.\sin\frac{\beta-\theta}{2}$ دالة تناقصية للمتغير θ ، يكفي أن

نثبت أنَّ $\frac{\psi}{1-\cos\psi}$ تتناقص لكي نثبت القول أ). ولكن ψ دالة تزايدية للمتغير θ إذا كان $\alpha \geq \beta$

مع $\theta \leq \alpha-\mu$ أو إذا كان $\alpha < \beta$ ؛ فيبقى إذاً أنْ ننظر في تناقصية الدالة $\frac{\psi}{1-\cos\psi}$ للمتغيِّر

ψ. يكون معنا:

$$\frac{d}{d\psi}\frac{\psi}{1-\cos\psi}=\frac{1-\cos\psi-\psi\sin\psi}{(1-\cos\psi)^2}=\frac{1}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}\left(1-\frac{\psi}{\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}}\right)$$ ،

ولذلك تكون تناقصية الدالّة $\frac{\psi}{1-\cos\psi}$ معادلة لِـ $\psi\geq \mathrm{tg}\frac{\psi}{2}$ ،

أي أنَّ: $\psi\leq\delta$، حيث تـحدَّد δ بواسطة المعادلة $\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}=\delta$ $(0<\delta\leq\pi)$؛

وهكذا نجد أنَّ: $\delta = 2,33112237$ زاوية نصف قطرية (أي أصغر قليلاً من $\frac{3\pi}{4}$).

يكون معنا، في الحالة التي يكون فيها $\alpha\geq\beta$، $\psi\leq\psi_m\leq\frac{\pi}{2}<\delta$ ، فتتناقص ξ إذاً في الفسحة: $-\beta\leq\theta\leq\alpha-\mu$. ونحصل، من جهة أخرى، على نفس النتيجة في الفسحة $\alpha-\mu\leq\theta\leq\beta$، حيث تكون ψ دالة تناقصية للمتغيِّر θ ، إذ إنَّ لدينا في الواقع:

$$\xi=\frac{\overline{EB}}{\overline{EB}}\cdot\frac{EI}{EB}\cdot\frac{\overline{EI}}{EI}=\frac{\psi}{\sin\frac{\psi}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\beta+\theta}\cdot\frac{EI}{EB}$$ ،

حيث تكون النسبتان الأخيرتان تناقصيتين وفقاً للقضايا ٤ وَ ١١ وَ ١٢، وحيث تكون النسبة الأولى تناقصية عندما يكون: $\theta\geq\alpha-\mu$. وهكذا تكون ξ، في الحالة التي يكون فيها $\alpha\geq\beta$، دالة تناقصية للمتغير θ في كل الفسحة $[-\beta,\beta]$.

لنتناول الآن الحالة التي يكون فيها $\beta>\alpha$: تتناقص ξ في الفسحة $-\beta\leq\theta\leq\varepsilon$، حيث تُعرَّف ε بواسطة المعادلة: $\cos\delta=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\ \cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\alpha\ \sin(\alpha-\varepsilon)}$.

إنَّ ψ، بما أنَّ $\delta>\frac{\pi}{2}$، تمرُّ بالقيمة $\frac{\pi}{2}$ قبل أن تصل إلى القيمة δ والقيمة $\varepsilon>\alpha-\mu'$. إذا كان $\theta=2\alpha-\beta-u$ ، يكون

$$\xi'=\eta'\sin(\alpha-\theta)-\eta\cos(\alpha-\theta)\approx\frac{C'}{4\alpha\sqrt{u}}\sin(\beta-\alpha)$$ ،

عندما تقترب u من 0 ؛ فنرى إذاً أنَّ ξ' تقترب من $+\infty$ عندما تقترب θ من $2\alpha-\beta$.

وهكذا يجب أن تنعدم ξ' بين ε وَ $2\alpha-\beta$ ؛ وإذا كانت θ_4 القيمة الأولى لِـ θ التي تـعْدِم ξ'،

فإنَّ ξ تتناقص إذا كان $\theta \ge \theta_4$، ولكنها تتزايد بعد ذلك. ويكون معنا، بما أنَّ $\theta_3 \ge \alpha - \frac{\pi}{2}$ (ص. ١٥٦)، $\alpha - \theta \le \frac{\pi}{2}$ ، إذا كان $\theta \ge \theta_3$ ، فينتج من ذلك أنَّ $\theta_4 \ge \theta_3$. ويُمكن أن نُثبت أنَّ θ_4 هي القيمة الوحيدة التي تُعدِم ξ' وأنَّ ξ تتزايد في الفسحة $\theta_4 \le \theta \le 2\alpha - \beta$ (انظر الشكل ٦١). والقول (أ) يكون إذاً صحيحاً فقط إذا كان $\theta_4 \le 0$، وهذا ما يتطلَّب أن يكون $\alpha \ge \frac{\beta}{2}$. ولكنَّ الشرط: $\theta_4 \le 0$ ، يعني أنَّ $\xi' \le 0$ عندما يكون $\theta = 0$، أي أنَّ:

$$\eta'_0 \sin\alpha - \eta_0 \cos\alpha = \frac{\beta\psi'_0 - \psi_0}{\beta^2}\sin\alpha - \frac{\psi_0}{\beta}\cos\alpha \le 0$$ ،

أو أيضاً: $\beta\frac{\psi'_0}{\psi_0} - 1 \le \frac{\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$ ،

وهذا ما يعادل

$$\frac{\beta}{\beta + \operatorname{tg}\alpha} \le \frac{\psi_0}{\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}}. \qquad (10)$$

نُعرِّف دالة، هي $\alpha_3(\beta)$، بواسطة المعادلة:

$$\frac{\beta}{\beta + \operatorname{tg}\alpha_3} = \frac{\psi_0}{\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}}$$ ،

حيث يكون: $\sin\frac{\psi_0}{2} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha_3}$ $\quad (\frac{\beta}{2} \le \alpha_3 \le \beta)$.

فنرى أنَّ α_3 تزايدية وأنَّ $\alpha_3 \le \alpha_2$ ؛ وتكون (أ) صحيحة في الفسحة : $\alpha \ge \alpha_3(\beta)$.

إنَّ $\alpha_3(0) = 0$ ، عندما يكون $\beta = 0$ ؛ إذا كان $\alpha_3(\beta) \approx \lambda\beta$ عندما تقترب β من 0 ، فإنَّ $\sin\frac{\psi_0}{2}$ يقترب من $\frac{1}{2\lambda}$، وتقترب $\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}$ من $\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2 - 1}}$ ويكون معنا:

$$\sqrt{4\lambda^2 - 1}\,\operatorname{tg}\frac{1}{2(1+\lambda)\sqrt{4\lambda^2 - 1}} = 1$$ ،

فينتج عن ذلك: $\lambda = 0{,}5152252767$، أو: $\left.\frac{d\beta}{d\alpha_3}\right|_{\alpha_3 = 0} = 1{,}94089856$.

إذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$، يكون معنا: $\sin\frac{\psi_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\alpha}$ وَ $\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$ ،

وَ $1 = \sqrt{-\cos 2\alpha_3}\,\operatorname{tg}\frac{1}{\left(2+\frac{4}{\pi}\operatorname{tg}\alpha_3\right)\sqrt{-\cos 2\alpha_3}}$،

فنستنتج أنَّ:

$\alpha_3(\frac{\pi}{2}) = 0{,}8099378632$ (يوجَد هذا العدد بين $\frac{\pi}{4}$ وَ $\frac{4\pi}{15}$)،

وأنَّ $\frac{\alpha_3}{\beta} = \frac{2\alpha_3}{\pi} = 0{,}515622458$.

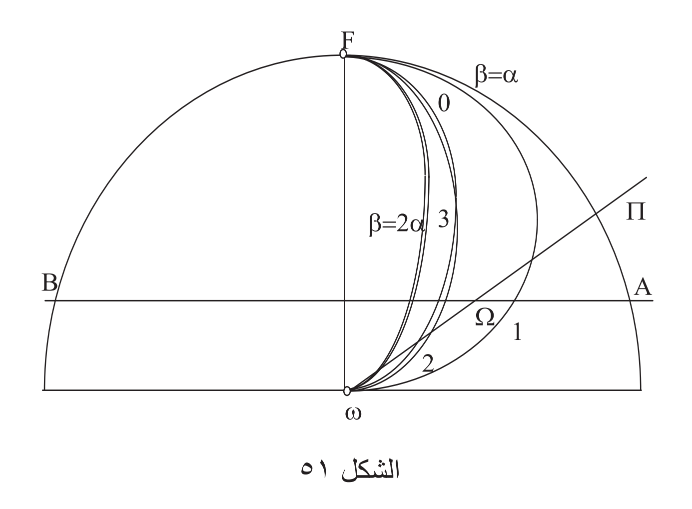
ملاحظة: إنَّ العبارة $\frac{\beta}{\beta + \operatorname{tg}\lambda\beta} = \frac{1}{1+\frac{\operatorname{tg}\lambda\beta}{\beta}}$ هي أيضاً دالة تناقصية للمتغير β وتبقى محصورة بين $\frac{1}{1+\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}$ وَ $\frac{1}{1+\lambda}$. فإذا جعلنا $\lambda\beta = \alpha_3$ في (10) يكون معنا:

$$\frac{1}{1+\lambda} \le 2\sqrt{-\cos\pi\lambda}\ \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{-\cos\pi\lambda}} \quad \text{وَ} \quad 2\sqrt{4\lambda^2-1}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2-1}} \le \frac{1}{1+\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}.$$

ونحصل من هاتين المتباينتين على $0{,}51 \le \lambda \le 0{,}52$.

ولكن يُمكن أنْ نُثبت أنَّ $\frac{\alpha_3}{\beta}$ هي دالة تزايدية للمتغير β، بحيث يكون: $0{,}5152 \le \lambda \le 0{,}516$ (انظر الشكل ٥٠).

إذا أخذنا محوريْ الإحداثيات ذات نقطة الأصل ω، بحيث يكون المحور الأول عمودياً على ωF (أي موازياً لِـ BA) وبحيث يكون المحور الثاني ωF، فإنَّ إحداثيَّتيْ نقطة التقاطع Ω بين $\Pi'\Pi$ وَ BA تساويان: $r\cos\beta\operatorname{tg}\alpha$ وَ $r\cos\beta$. ونظراً إلى أنَّ الدوال $\alpha_j(\beta)$ ($j=1, 2, 3$) تزايدية، فإنَّ الشروط $\alpha \ge \alpha_j(\beta)$ تعني أنَّ Ω توجَد على يمين المنحني ذي الرقم j على الشكل ٥١.



الشكل ٥١

تكون القضية ١٤ ، في الوضعية $\omega\Pi$، صحيحة، ولكن فقط للمتباينة الثانية.

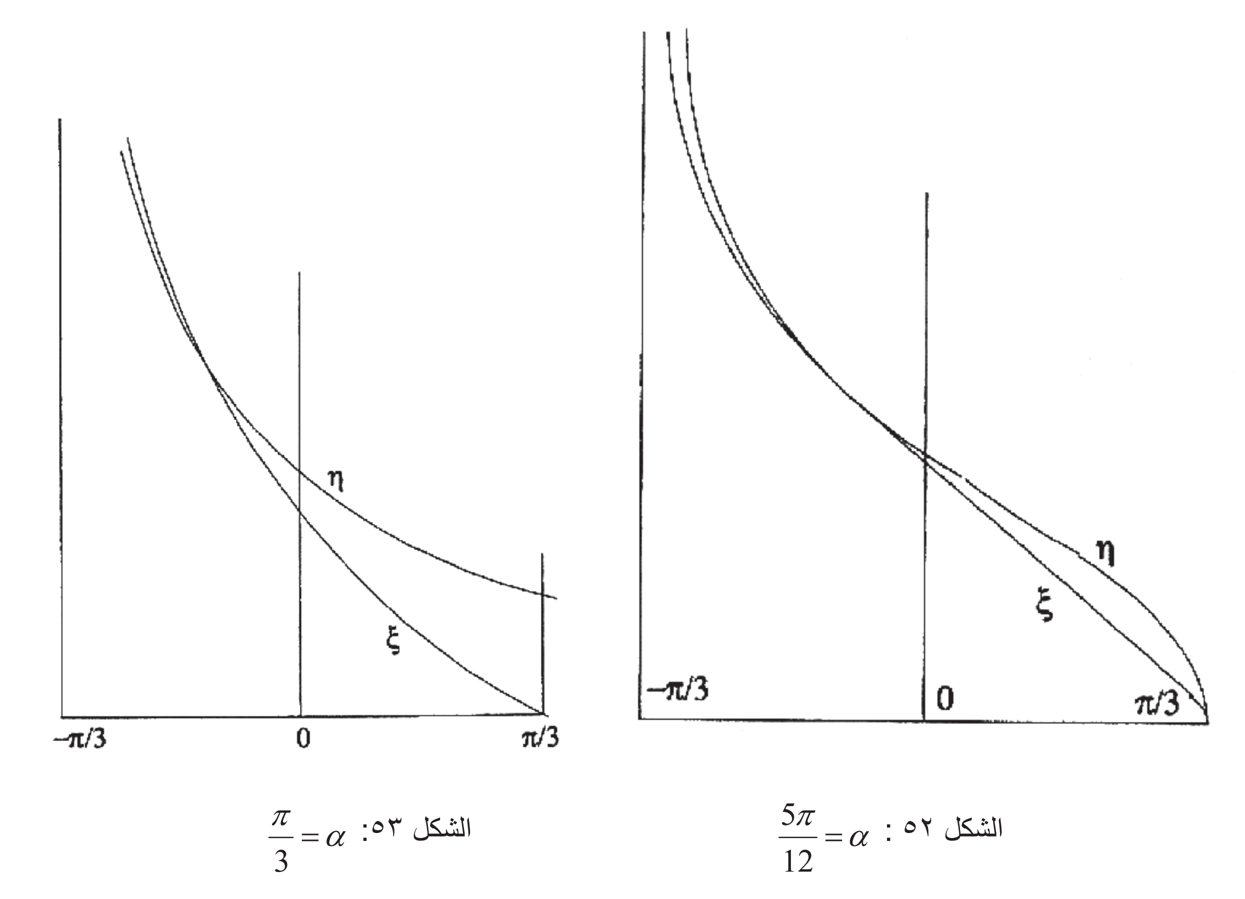
القسم الرابع: أمثلة

لقد اخترنا $\beta = \frac{\pi}{3}$ في كل هذه الأمثلة؛ وقيم $\alpha j\ (\beta)$ $(3،\ 2،\ j = 1)$ الموافقة هي على التوالي:

$\alpha_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}932458266$ (يكون معنا $\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}$ ، إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{4}$ وَ $\beta = \frac{\pi}{3}$)،

$\alpha_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}659224289$ وَ $\alpha_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}53978010008$.

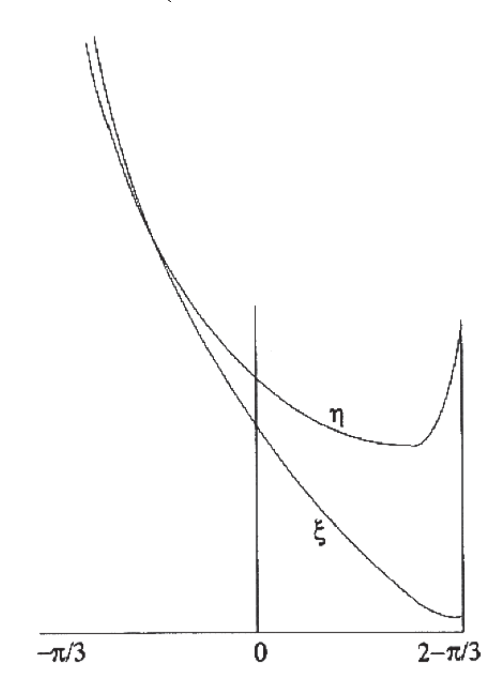
إذا كان $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$، فإنَّ ξ وَ η تتناقصان في الفسحة $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ وتكون ψ فيها دالة مقعَّرة بالنسبة إلى لمتغيِّر θ. ولقد رسمنا الخطَّين البيانيين لِـ ξ وَ η عندما يكون $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ (الشكل ٥٢) وعندما يكون $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (الشكل ٥٣).



الشكل ٥٣: $\alpha = \frac{\pi}{3}$

الشكل ٥٢ : $\alpha = \frac{5\pi}{12}$

إذا كان $\frac{\pi}{3} < \alpha \leq 0,932458266$ ، تكون ψ مقعّرة في الفسحة $0 \leq \theta \leq -\frac{\pi}{3}$ وتتناقص ξ وَ η في هذه الفسحة (الشكل ٥٤، حيث يكون α = 1).



الشكل ٥٤: α = 1

$\theta_3 = 0,72055$ ، حد η الأدنى $= 0,935784028$ ، $\theta_4 = 0,9500790346$ ، حد ξ الأدنى $= 0,0700698854$

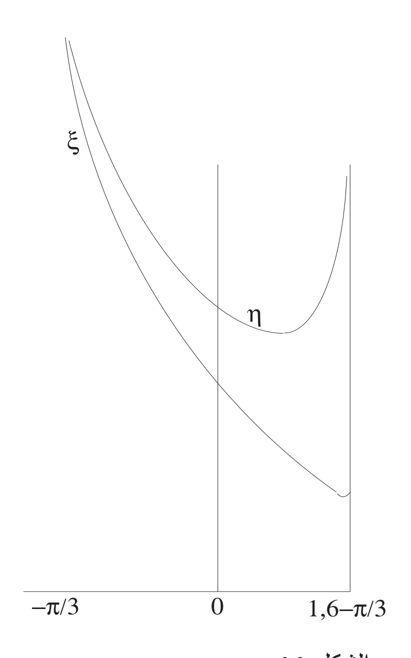
إذا كان $0,932458266 > \alpha \geq \frac{\pi}{4}$، تكفُّ ψ عن التقعّر عندما تبلغ θ القيمة $\theta_0 > 0$،

وتبقى $\psi \geq \frac{\pi}{2}$ إذا بقيت $\theta \geq 0$ ؛ وتتناقص ξ وَ η في الفسحة $0 \geq \theta \geq -\frac{\pi}{3}$ (الشكل ٥٥، حيث يكون α = 0,8). إذا كان $\frac{\pi}{4} > \alpha \geq 0,659224289$ تبقى ξ وَ η تناقصيتَّيْن في الفسحة $0 \geq \theta \geq -\frac{\pi}{3}$ ؛ ولكن ψ تكفُّ عن التقعّر عندما تبلغ θ القيمة $\theta_0 > 0$ وتبلغ القيمة $\frac{\pi}{2}$ عندما يكون $\theta = \mu' - \alpha < 0$ (الشكل ٥٦، حيث يكون α=0,75).

إذا كان $0,659224289 > \alpha \geq 0,53978010008$، تتناقص ξ في الفسحة $0 \geq \theta \geq -\frac{\pi}{3}$ ؛ ولكن η تبلغ حداً أدنى عندما تكون θ مساوية لـِ $\theta_3 < 0$ (الشكل ٥٧، حيث يكون $\alpha = \frac{\pi}{5}$،

والشكل ٥٨، حيث يكون α = 0,55).

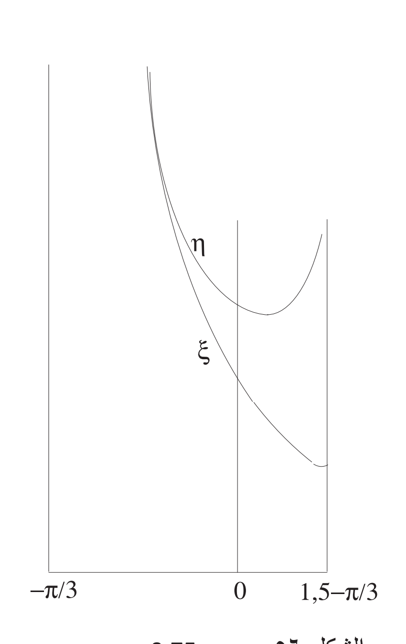
وأخيراً، إذا كان $\alpha <$ 0,53978010008 ، فإنَّ كلاً من الدالتَّين ξ وَ η تبلغ حداً أدنى عندما تصل θ على التوالي إلى القيمتين السالبتين θ_3 وَ θ_4 (انظر الشكل ٥٩، حيث يكون α = 0,524). وإذا كان $\frac{\beta}{2} > \alpha$ فإنَّ θ تبقى دائماً سالبة (الشكل ٦٠، حيث يكون $\alpha = \frac{\pi}{12}$).



الشكل ٥٥ : α = 0,8

θ_3=0, 24483 ، حد η الأدنى = 1,40613647

θ_4= 0,537776499، حد ξ الأدنى= 0,452137244

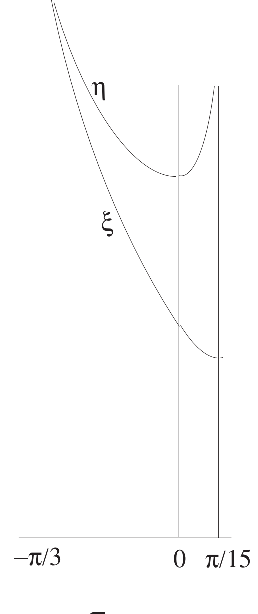


الشكل ٥٦ : α = 0,75

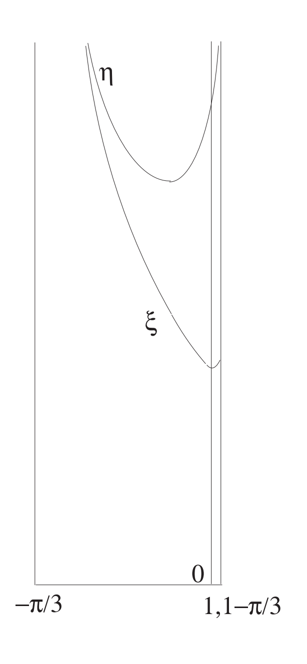
θ_3= 0,15413، حد η الأدنى = 1,5403285

θ_4 = 0,4346042281 ،

حد ξ الأدنى= 0,576095779



الشكل ٥٧ : $\alpha = \frac{\pi}{5}$



الشكل ٥٨ : $\alpha = 0,55$

$\theta_3 = -0,0503$ ، حد η الأدنى = 1, 9362108

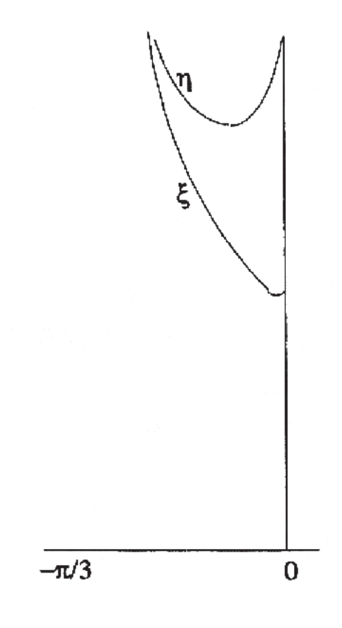
$\theta_4 = 0,1831447956$ ،

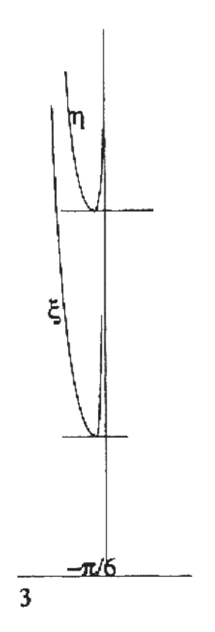
حد ξ الأدنى = 0,949376423

$\theta_3 = -0,17463$ ، حد η الأدنى =2,27086432

$\theta_4 = 0,021138879$ ، حد ξ الأدنى =1,2654303

ولقد رسمنا، على الشكل ٦١، الخطوط البيانية للدوالّ: $\theta = 2\alpha - \beta$، $\theta_4(\alpha)$، $\theta_3(\alpha)$ ، $\alpha - \mu'$ وَ $\theta_0(\alpha)$ بالنسبة إلى المتغيِّر $\alpha \in]0, \beta]$ ، عندما تكون $\beta = \frac{\pi}{3}$. الزاوية θ مُلْزَمَة بالتغيّر من $-\beta$ إلى $2\alpha - \beta$ ، أيْ أنَّ المنطقة الموجودة تحت الخط القطري $\theta = 2\alpha - \beta$، هي وحدها المفيدة. ويكون القول (أ) صحيحاً تحت منحنى θ_4، بينما يكون القول ب) صحيحاً فوق منحنى θ_3.





الشكل ٥٩ : $\alpha = 0,524$ ؛ $\theta_3 = -0,21518$

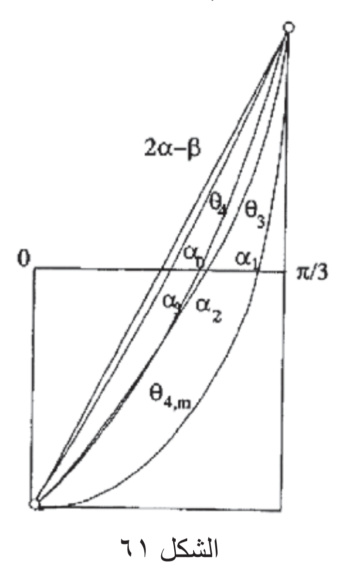
حد ηالأدنى = 2,40218858

θ_4=0, 03261719–، حد ξ الأدنى = 1,3887698

الشكل ٦٠ : $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ، θ_3 =0,620835– ،

حد ηالأدنى= 5,099228 ، θ_4= 0,566379471– ،

حد ξ الأدنى = 3,83612407



الشكل ٦١

إنَّ التعقيد في هذه المناقشة الطويلة يُبيِّن أنَّ التحديد المضبوط للشروط التي تؤمِّن صحة هذه القضية كانت حقّاً فوق متناول رياضيات عصر ابن الهيثم، وحتى فوق متناول تلك التي سبقت القرن الثامن عشر.

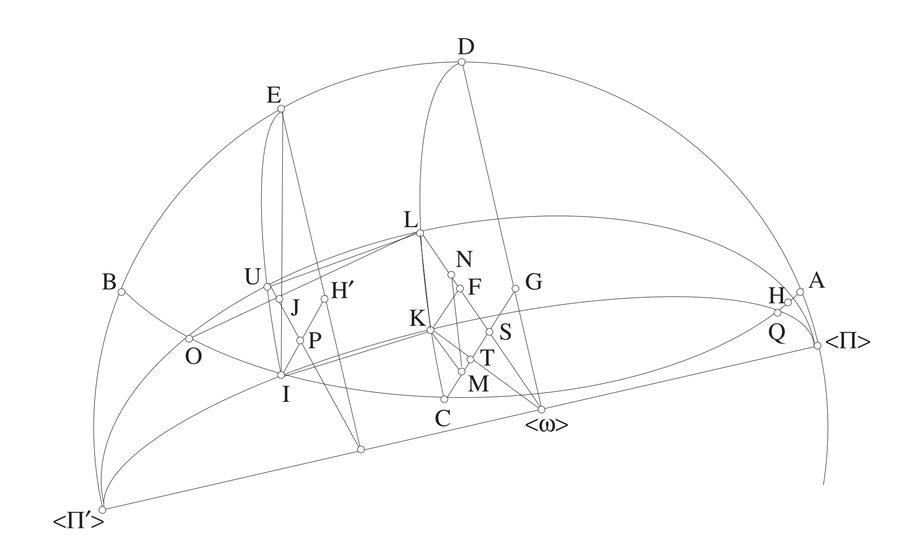
القضية ١٥- لنأخذ الشكل من جديد. الفرضيات الخاصة بالدوائر ABC، EI وَ DC تبقى من دون تغيير: (ABC) أفقية، والدائرتان (EI) وَ (DC) موازيتان لدائرة معدّل النهار(ثلاث حالات).

الدائرة $ADEB$ هي دائرة نصف النهار. ونفترض أنَّ $\overset{\frown}{BDA}\ \frac{1}{2} \geq \overset{\frown}{BD}$.

ونأخذ، بالإضافة إلى ذلك، دائرة عظمى أخرى مارة بالقطبين؛ هذه الدائرة العظمى تقطع الدائرة ABC على النقطتين O وَ H وتقطع القوس $\overset{\frown}{EI}$ على النقطة U والقوس $\overset{\frown}{DC}$ على النقطة L[١٣].

يكون معنا، وفقاً لهذه الفرضيات، $\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} > \frac{\overset{\frown}{CL}}{\overset{\frown}{LO}} > \frac{\overset{\frown}{UI}}{\overset{\frown}{UO}}$.

نريد أن نبيِّن أنَّ النتيجة المُثبَتة انطلاقاً من دائرة نصف النهار BED تبقى صالحة انطلاقاً من دائرة عظمى مثل الدائرة OUL. إنَّ لدائرة نصف النهار BED وضعاً خاصاً لأنـّها عمودية على الأفق؛ لِنبدلـْها بدائرة اختيارية لنصف النهار؛ هذه القضية تُعمِّم إذاً القضية السابقة.



الشكل ٦٢

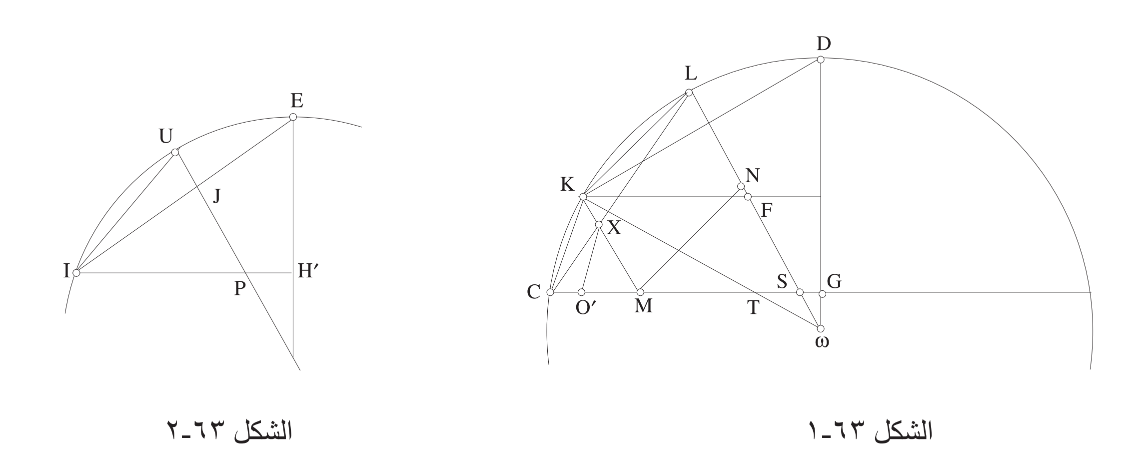
إنّ ω مركز الدائرة DLC موجود على خط القطبين؛ ويقطع الدائرةَ DLC ، إذاً، مُستويَا الدائرتين العظميَيْن IKQ وَ OUL وفقاً لقطرين موجودين على الخطين KT وَ SL.

لنفرض أوّلاً أنَّ قسم الدائرة DLC، الموجود فوق ABC، أصغر من نصف دائرة، فتكون ω إذاً تحت المستوي ABC.

[١٣] النقطة L لها هنا تعريف مختلف عن التعريف السابق.

يكون معنا: $\widehat{DGC}$ زاوية قائمة، $\widehat{LSC}$ زاوية حادة، وَ $\widehat{KTC}$ زاوية حادة. نرفق بالقطر الخارج من K المثلث القائم الزاوية $TG\omega$، ونرفق بالقطر الخارج من L، المثلث $SG\omega$ الذي هو داخل المثلث السابق. يكون معنا إذاً $\widehat{LSC} < \widehat{ST\omega}$، فنستنتج من ذلك أنَّ $\widehat{LSC} < \widehat{KTC}$.

نُخرِج KM بحيث يكون $LS // KM$، فيكون معنا: M هي بين T وَ C وَ $KM < LS$؛ ونُخرِج MN بحيث يكون $KL // MN$، فيكون معنا عندئذ: $KL = MN$ وَ $NL = KM$.



الشكل ٦٣ـ١ الشكل ٦٣ـ٢

القوس $\widehat{KL}$ مشابهة للقوس $\widehat{UI}$، فيكون إذاً $\frac{IU}{MN} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{IU}{KL}$.

ليكن UP القطر الخارج من U في الدائرة EI، فيكون معنا $UP // LS$، $PI // CS$، فنستنتج أنَّ: $\widehat{UPI} = \widehat{LSC}$.

نخرج KF بحيث يكون $CG // KF$، فيكون معنا $\widehat{UIP} = \widehat{LKF}$ (لأنَّ القوسين $\widehat{LK}$ وَ $\widehat{LD}$ مشابهتان على التوالي للقوسين $\widehat{UI}$ وَ $\widehat{EU}$). يكون معنا عندئذ $\widehat{UIP} = \widehat{NMS}$، فيكون المثلثان NMS وَ UIP متشابهين وبالتالي: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{UP}{NS} = \frac{IU}{MN}$.

١) فإذا كان إذاً: $d_1 < d_2$، يكون معنا: $UP < NS$، وإذا كان $d_1 = d_2$ يكون معنا $UP = NS$.

إذا استدللنا كما فعلنا في القضية السابقة، نبيِّن أنَّ: $\frac{KM}{KI} > \frac{SL}{LO}$.

ولكنَّ $NL = KM$ وَ $LU = KI$ ، فيكون معنا إذاً $\frac{NL}{LU} > \frac{SL}{LO}$.

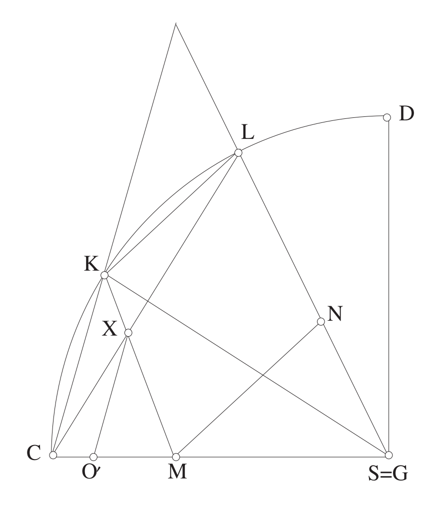
٢) إذا كان : $d_2 < d_1$، وإذا كان $\frac{UP}{PJ} \geq \frac{d_1}{d_2}$ ، نُبيِّن أيضاً أنَّ: $\frac{NL}{LU} > \frac{SL}{LO}$ أو $\frac{KM}{KI} > \frac{SL}{LO}$.

لقد رأينا أنَّ $\widehat{LSC} = \widehat{KMC}$ زاوية حادّة ؛ فإذا أخرجنا من K العمود على CG فإنَّه يسقط بين M و C. الخط LC يقطع KM على النقطة X، ونُخرج XO' بحيث يكون $CK // XO'$. إنَّ الزاوية $\widehat{KCM}$ حادّة، وفقاً للفرضيات، وكذلك $\widehat{KCM} = \widehat{XO'M}$، فتكون إذاً الزاوية $\widehat{XO'C}$ منفرجة، فنستنتج أنَّ: $XC < XO'$؛ فيكون بالتالي: $\frac{O'X}{XM} > \frac{CX}{XM}$. ولكن $\frac{CL}{LS} = \frac{CX}{XM}$ وَ $\frac{CK}{KM} = \frac{O'X}{XM}$ ، فيكون معنا إذاً : $\frac{CK}{KM} > \frac{CL}{LS}$.

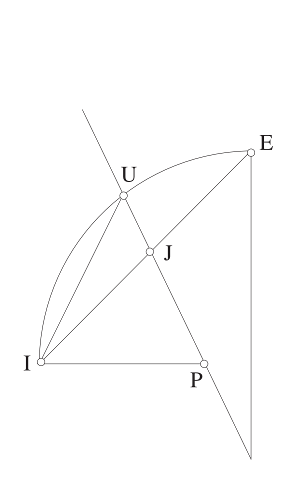
إنَّ لدينا، من جهة أخرى $\frac{KM}{KI} > \frac{LS}{LO}$ ، فإذاً $\frac{CK}{KI} > \frac{CL}{LO}$ ، فيكون بالتالي: $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}}$ ، إذا استخدمنا لازمة القضية ٤. ولكن شروط تطبيق هذه اللازمة، للأسف، لا تتحقّق دائماً (انظر لاحقاً).

إذا كان قسم الدائرة CLD الذي هو فوق المستوي (ABC) مساوياً لنصف دائرة، يكون عندئذ: $G = \omega$ ، وَ $GC = GD$. ويكون القطب الظاهر Π، في هذه الحالة، فوق المستوي ABC. النقطة G موجودة على المحور المار بالقطبين، وهذه النقطة هي، في آن معاً، في المستوي ABC وفي كل من المستويَيْن QKI وَ HLO ؛ وَلذلك تتقاطع الخطوط: AB ، HO وَ QI على النقطة G ($T = S = G$) فتكون الخطوط: $GC = GL = GK$ أنصاف أقطار للدائرة CLD ، وتكون CK وتراً ، فتكون $\widehat{KCG}$ زاوية حادة .

وإذا أخرجنا الخط CK على استقامة إلى ما بعد K، فإنَّه يقطع LG لأنَّه يقطع GD. نخرج KM بحيث يكون $KM // LG$ ، فتكون M بين C وَ G ، ويكون $LG > KM$. ونُخرج MN بحيث يكون $KL // MN$ ، فيقطع الخطُّ CL الخطَ KM على النقطة X ؛ ونخرج XO' بحيث يكون $KC // XO'$ ؛ وتكون الزاوية $\widehat{XO'C}$ منفرجة، فيكون إذاً: $XO' < XC$.



الشكل ٦٤-١



الشكل ٦٤-٢

ولكن $\frac{CL}{LG}=\frac{CX}{XM}$ وَ $\frac{CK}{KM}=\frac{XO'}{XM}$ فإذاً: $\frac{CK}{KM}>\frac{CL}{LG}$.

المثلث GNM مشابه للمثلث IUP وَ $\frac{d_1}{d_2}=\frac{UP}{NG}=\frac{IU}{MN}$.

إذا كان $d_1 \leq d_2$، يكون معنا إذاً $UP \leq NG$ ، ونحصل كما في السابق على $\frac{NL}{LU}>\frac{GL}{LO}$.

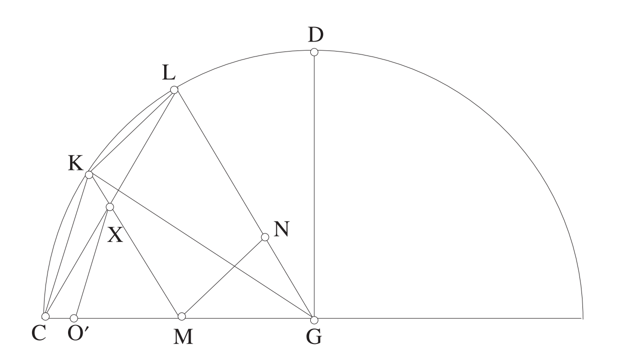
إذا كان $d_2 < d_1$ ، وإذا كان $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{UP}{PJ}$ يكون معنا أيضاً $\frac{NL}{LU}>\frac{GL}{LO}$ ، فنحصل بالتالي على $\frac{MK}{KI}>\frac{GL}{LO}$.

ولكنَّ $\frac{CK}{KM}>\frac{CL}{LG}$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{CK}{KI}>\frac{CL}{LO}$ ، فنحصل بالتالي، كما حصلنا في الحالة الأولى، على $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}>\frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}}$.

نستخلص من هذه النتيجة أنَّ: $\frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}} > \frac{\widehat{CL}-\widehat{CK}}{\widehat{LO}-\widehat{KI}}$، وأنَّ القوس $\widehat{LK}=\widehat{CL}-\widehat{CK}$ مشابهة للقوس $\widehat{UI}$ [١٤] ، $\widehat{UO}=\widehat{LO}-\widehat{LU}=\widehat{LO}-\widehat{KI}$، فيكون معنا إذاً:

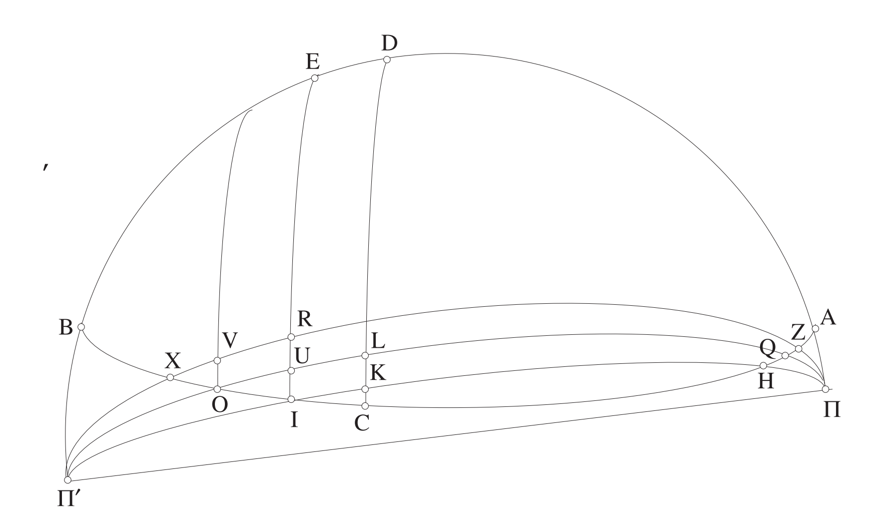
[١٤] يكتب ابن الهيثم هنا المساواة بين القوسين $\widehat{LK}$ وَ $\widehat{UI}$ ؛ ولكن هاتين القوسين المتشابهتين تنتميان إلى دائرتين مختلفتين. النتيجة ليست إذاً عامة، إذ إنه لا يُمكن الحصول على النتيجة إلا إذا كان $\widehat{UI} \geq \widehat{LK}$ ، أي إذا كان $d_1 \geq d_2$. والقوسان $\widehat{LK}$ وَ $\widehat{UI}$ ، هنا أيضاً، تقابلان نفس الزاوية في دائرتين مختلفتين، ويُمكن الظنّ أن ابن الهيثم كان يقوم بالاستدلال على الزوايا بالرغم من أنه تكلّم على الأقواس.

$\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}} > \frac{\widehat{UI}}{\widehat{UO}}$.



الشكل ٦٤-٣

فتكون النتيجة : $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}} > \frac{\widehat{UI}}{\widehat{UO}}$.



الشكل ٦٥ [١٥]

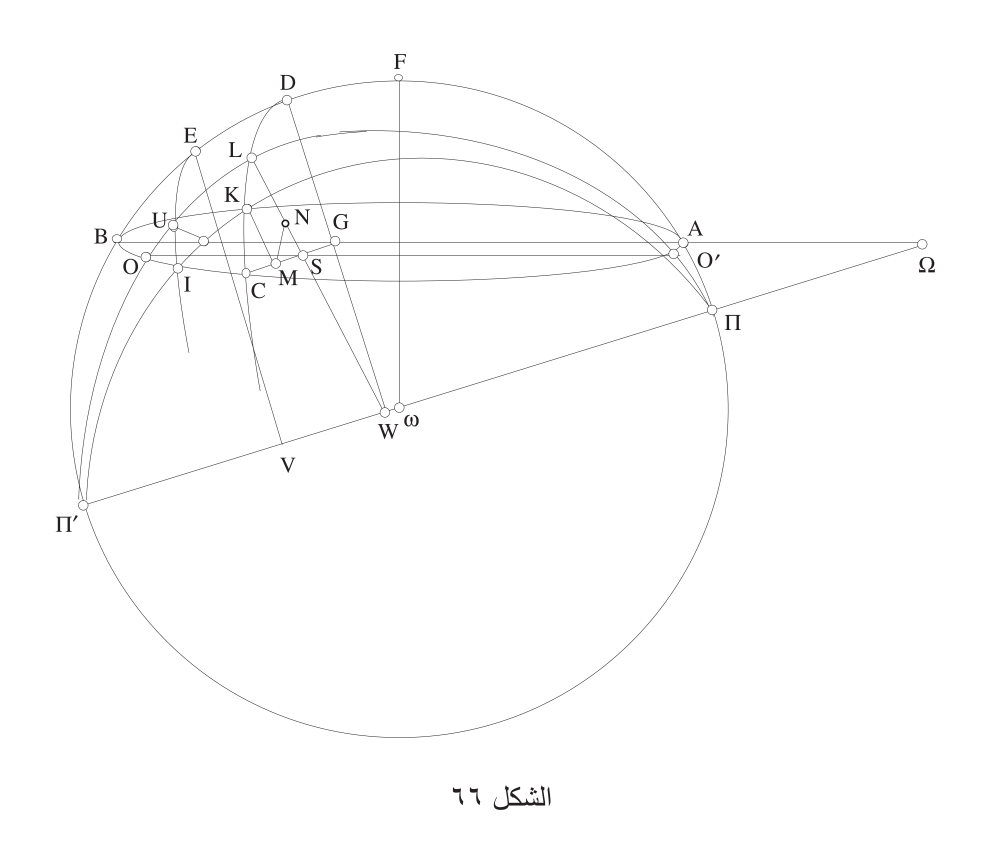
نأخذ دائرة عظمى أخرى ذات قطر $\Pi\Pi'$ تقطع ACB على النقطة X وتقطع القوس EI على النقطة R، ونأخذ الدائرة المارة بالنقطة O والموازية للدائرة IE فتقطع القوس XR على النقطة V.

[١٥] لقد استخدم الحرف O قبل هذه المرَّة.

إنَّ الاستدلال، الذي قمنا به في القسم السابق للدائرتين العظميَيْن IKH وَ OLQ اللتين تقطعان الدائرتين المتوازيتين EI وَ CD، ينطبق هنا على الدائرتين العظميَيْن OLQ وَ XRZ اللتين تقطعان الدائرتين المتوازيتين EI وَ OV؛ فنحصل على النتيجة: $\frac{\widehat{UI}}{\widehat{UO}} > \frac{\widehat{IR}}{\widehat{RX}} > \frac{\widehat{OV}}{\widehat{VX}}$.

شرح:

نحتفظ برموز شرح القضية ١٤، مع المتغيِّر الإضافي $\widehat{DWL} = \lambda$ الذي يُحدِّد مستوي نصف النهار OUL المعرَّف بالمعادلة: $y = z \operatorname{tg} \lambda$. يكون معنا: $0 \leq \lambda \leq \Psi$ والموضعان القصويان للمستوي OUL هما المستوي BED $(\lambda =0)$ ومستوي دائرة نصف النهار للنقطة C $(\lambda = \Psi)$ (الشكل ٦٦).



الشكل ٦٦

إذا كان $\widehat{L\omega O} = \varphi$ وَ $\widehat{\Pi\omega O} = \alpha - \Theta + \varphi$ ، فإنَّ إحداثيات النقطة O تكون:

$r \cos (\alpha - \Theta + \varphi) = x$ ، $r \sin \lambda \sin (\alpha - \Theta + \varphi) = y$ ، $r \cos \lambda \sin (\alpha - \Theta + \varphi) = z$.

أما معادلة المستوي ABC فهي: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = r \cos \beta$، والنقطة O موجودة في المستوي ABC ، فنستنتج أنَّ:

$\cos \beta = \cos \alpha \cos (\alpha - \Theta + \varphi) + \cos \lambda \sin \alpha \sin (\alpha - \Theta + \varphi)$، (1)

وهذه المعادلة تُحدِّد قيمتين للمتغيِّر $\varphi \in [0 , \pi]$ تتوافقان على التوالي مع النقطتين O وَ O'؛ والنقطة O تتوافق مع القيمة العظمى للمتغيّر φ.

الزاوية $\widehat{LWC}$ تساوي $\Psi - \lambda$، فإذاً $\widehat{CL} = r(\Psi - \lambda) \sin (\alpha - \Theta)$ ، ويكون معنا: $r\varphi = \widehat{LO}$ ؛ وهكذا يكون: $\frac{\Psi - \lambda}{\varphi}\sin(\alpha - \Theta) = \frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}}$.

وعندما تصل D إلى E، فإنَّ هذه النسبة تُصبح $\frac{\widehat{UI}}{\widehat{UO}}$، ونرى أنَّ المتباينة الأولى تعني أنَّ $\frac{\psi - \lambda}{\varphi}\sin(\alpha - \theta)$ دالةٌ تناقصية للمتغيّر θ إذا كانت λ ثابتة معلومة. وعندما تصل L إلى K فإنَّ نفس النسبة تُصبح $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$، وتعني المتباينة الثانية أنَّ $\frac{\psi - \lambda}{\varphi}\sin(\alpha - \theta)$ دالة تناقصية للمتغيّر λ إذا كانت θ ثابتة معلومة.

القسم الأول: دراسة الزاوية φ

المعادلة (1) تعطي $\theta_ (\lambda) = \theta - \varphi$ ، أي $\theta - \theta_ (\lambda) = \varphi$ حيث تكون $\theta_$ الدالة المعكوسة للدالة $\theta \mapsto \psi(\theta)$، المعرَّفة في الصفحة ١٤٤. ولكن $\theta_$ دالة تزايدية من $-\beta$ إلى $\theta - \mu$ في الفسحة $0 \le \lambda \le \psi_m$ إذا كان $\alpha \ge \beta$ ، ومن $-\beta$ إلى $2\alpha - \beta$ في الفسحة $0 \le \lambda \le \pi$ إذا كان $\alpha < \beta$. تكون $\theta_$ محدَّبة في الحالة التي يكون فيها $\alpha \ge \beta$؛ أما في الحالة التي يكون فيها: $\alpha < \beta$، فإنَّ $\theta_$ تكون محدّبة إلى أن تبلغ $\theta_$ القيمة θ_0 المعرَّفة بالمعادلة $P(\cos(\alpha - \theta_0)) = 0$ ، ثم تصبح مقعَّرة (انظر ص. ١٥١-١٥٢). وينتج عن ذلك أنَّ φ دالة تناقصية بالنسبة إلى لمتغيّر λ، من $\theta + \beta$ إلى $\theta - \alpha + \mu$ في الفسحة $0 \le \lambda \le \psi_m$ إذا كان $\alpha \ge \beta$ ، ومن $\theta + \beta$ إلى $\theta - 2\alpha + \beta$ في الفسحة : $0 \le \lambda \le \pi$ إذا كان $\alpha < \beta$. وتكون φ مقعَّرة في الحالة $\alpha \ge \beta$؛ وتكون مقعَّرة أيضاً في الحالة $\alpha < \beta$ إذا اقتصرناها على الفسحة:

$0 \le \lambda \le \lambda_0$، حيث تُحقِّق λ_0 المعادلة: $\theta_0 = \theta_ (\lambda_0)$.

يكون معنا: $\cos\lambda - \cos\psi = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)} - \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta+\varphi)} =$

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left[\begin{array}{c}(\cos\beta(\sin(\alpha-\theta)) - \sin(\alpha-\theta+\varphi))+ \\ \cos\alpha\left(\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi) - \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta+\varphi)\right)\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left(-2\cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\alpha-\theta+\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\alpha\sin\varphi\right)$$

$$= \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left(\cos\alpha\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\beta\cos\left(\alpha-\theta+\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left(\cos\alpha\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\beta\left(\cos(\alpha-\theta+\varphi)\cos\frac{\varphi}{2} + \sin(\alpha-\theta+\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)}\left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}\right)،$$

أيْ أنَّ:

$$\cos\lambda - \cos\psi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{t\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)} \qquad (2)$$

مع

$$t = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin(\alpha-\theta+\varphi)}. \qquad (3)$$

ولكنَّ

$$t^2 = \frac{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\theta+\varphi) + \cos^2\beta\cos^2(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin^2(\alpha-\theta+\varphi)}$$

$$= \cos^2\beta - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\lambda = \sin^2\lambda\sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

وهكذا نرى أنَّ $t = 0$، تفرض $\sin\lambda = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$، وهذا غير ممكن إلا عندما يكون: $\alpha \geq \beta$؛

يكون معنا عندئذ: $\psi_m = \lambda$ ($\lambda \leq \psi_m \leq \frac{\pi}{2}$)، فيكون معنا أيضاً $\psi = \psi_m$ وَ $\theta = \alpha - \mu$.

وهكذا نرى أنَّ t لا تنعدم في الفسحة $0 \leq \lambda < \psi$، فتحتفظ إذاً بإشارتها.

إذا كان $\lambda = 0$، يكون معنا: $\alpha + \beta = \alpha - \theta + \varphi$ وَ $0 < \sin\beta = t$؛ وهكذا تبقى t موجبة ويكون معنا:

$$t = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\lambda} \qquad (4)$$

لنلاحظ أنَّه، إذا جعلنا $\varphi = \theta - \theta_(\lambda)$ في (3)، فإنَّ البَسْط (أي صورة الكسر) يُصبح:

$\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha - \theta_-(\lambda))$، فهي دائماً موجبة إذا كان $\alpha > \beta$ وأيضاً إذا كان $\alpha \geq \beta$، لأنَّ $\theta_(\lambda) \leq \alpha - \mu$ وفقاً لتعريف $\theta_$.

إذا كان $\lambda = \psi$، يكون معنا $0 = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(t\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ وَ $\varphi = \theta - \theta_-(\lambda)$ مع $\theta = \theta_-(\psi)$ إذا كان $\alpha < \beta$ أو إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta \leq \alpha - \mu$، ولكن $\theta = \theta_+(\psi)$ إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta \geq \alpha - \mu$. وهكذا يكون $\varphi = 0$ إذا كان $\alpha < \beta$ أو إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta \leq \alpha - \mu$؛ وإذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta > \alpha - \mu$، يكون: $\varphi = \theta_+(\psi) - \theta_-(\psi) > 0$،

فيكون إذاً: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{t}{\cos\beta}$.

المعادلة (4)، في شرح القضية ١٤، تُعطي:

$$\varphi'_\lambda = \frac{\sin\lambda\sin\alpha\sin^2(\alpha - \theta_(\lambda))}{\cos\beta\cos(\alpha - \theta_(\lambda)) - \cos\alpha} \quad \text{(حيث يكون } \varphi'_\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\text{)}$$

ونتحقَّق أنَّ هذه العبارة سالبة. وهي تصبح غير منتهية عندما يكون $\alpha \geq \beta$ وَ $\psi_m = \psi = \lambda$، إذ يكون معنا عندئذ: $\mu = \alpha - \theta_(\psi_m)$. لنجعل $\psi_m = \psi$، أي $\theta = \alpha - \mu$ وَ $\theta - \varphi = \theta_(\lambda) = \alpha - \mu - \varphi$؛ فيكون معنا:

$$\frac{\sin\lambda\sin\alpha\sin^2(\mu+\varphi)}{\cos\beta\cos(\mu+\varphi)-\cos\alpha}=\varphi'_\lambda \ .$$

المقام (مخرج الكسر):

$$\cos\beta\cos\mu\cos\varphi-\cos\beta\sin\mu\sin\varphi-\cos\alpha=\cos\beta\cos(\mu+\varphi)-\cos\alpha$$

$$-2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\beta\sin\mu\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\alpha\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$

يعادل $-\varphi\cos\beta\sin\mu$ عندما تقترب φ من 0 ، بينما يقترب البَسْط من μ $\sin\beta\sin^2$ ؛ وهكذا يكون: $\varphi'_\lambda\approx-\frac{\mathrm{tg}\beta\sin\mu}{\varphi}$.

ولكن، وفقاً للمعادلة (3):

$$t=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos(\mu+\varphi)}{\sin(\mu+\varphi)}\approx\varphi\cos\beta \text{؛}$$

وإذا كان $\lambda=\psi_m-u$ ، يكون معنا:

$$\sin^2\beta-\sin^2\alpha(\sin\psi_m\cos u-\cos\psi_m\sin u)^2=t^2$$

$$=(2\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\sin^2u+\sin\beta\cos\beta\sin\mu\sin2u \text{،}$$

لأنَّ $\cos\psi_m=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\sin\mu$ ، وهكذا يكون: $2\sin\beta\cos\beta\sin\mu\cdot u\approx t^2$ عندما يقترب u من 0 ؛

وهذا ما يعطي: $\varphi\approx2\sqrt{2u\mathrm{tg}\beta\sin\mu}$ ،

وفي النهاية :

$$\varphi'_\lambda\approx-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\beta\sin\mu}{2u}} \text{،} \qquad (5)$$

عندما تقترب u من 0، إذا كان $\psi_m-u=\lambda$.

القسم الثاني : دراسة $\eta = \frac{\psi - \lambda}{\varphi}$ كدالة للمتغيّر λ

إنَّ العبارة $\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\psi-\lambda}{\varphi} = \frac{-\varphi-(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda}{\varphi^2}$ هي ذات إشارة مضادَّة للعبارة $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$،

والعبارة $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda\right)=(\psi-\lambda)\varphi''_{\lambda^2}$ لها نفس إشارة φ''_{λ^2} لأنَّ $\lambda \le \psi$. ولقد رأينا أنَّ $\varphi''_{\lambda^2} \le 0$، إذا كان $\beta \le \alpha$ ، أو إذا كان $\beta > \alpha$ مع $\lambda \le \lambda_0$ (حيث يكون $\theta_-(\lambda_0)=\theta_0$)، بينما يكون $\varphi''_{\lambda^2} > 0$ إذا كان $\beta > \alpha$ مع $\lambda_0 < \lambda$.

إذا كان $\beta \le \alpha$ ، فإنَّ $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ تتناقص إذاً ابتداءً من قيمتها الأوّلية : $\theta+\beta=\varphi$ (عندما يكون $\lambda = 0$، حيث يكون $\varphi'_\lambda = 0$) حتى قيمتها النهائية $\varphi = 0$ أو $2\text{Arc tg}\frac{t}{\cos\beta} > 0$، وفقاً للحالة $\theta \le \alpha - \mu$ أو للحالة $\theta > \alpha - \mu$ (عندما يكون $\lambda = \psi$).

إنَّ لدينا، بالفعل، $(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda = 0$ عندما يكون $\lambda = \psi$، وذلك يكون حتى في الحالة التي تكون فيها φ'_λ لامتناهية، لأنَّه إذا كان $\lambda = \psi_m - u$، فإنَّ:

$$(\psi_m-\lambda)\varphi'_\lambda \approx -\frac{u}{2}\cdot\sqrt{\frac{\text{tg}\,\beta\sin\mu}{2u}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u\,\text{tg}\,\beta\sin\mu}{2}}$$

تقترب من الصفر عندما يقترب u من الصفر. وينتج عن ذلك أنَّ العبارة $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ تبقى موجبة وأنَّ $\frac{\psi-\lambda}{\varphi}$ تتناقص باستمرار. وهكذا تكون متباينة ابن الهيثم الثانية صحيحة في هذه الحالة، وذلك عندما يكون $-\beta \le \theta \le \beta$، وَ $0 \le \lambda \le \psi$.

وإذا كان $\beta > \alpha$، فإنَّ $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ تتناقص من $\beta+\theta$ إلى حدّ أدنى تبلغه عندما يكون $\lambda = \lambda_0$ ، ثم تتزايد في الفسحة $\lambda_0 \le \lambda \le \psi$ ؛ والقيمة النهائية هي $\varphi = 0$ ، فالحد الأدنى يكون إذاً سالباً وتوجَد قيمة وحيدة $\lambda_1 \in]0, \lambda_0[$ تجعل $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ معدومة. يكون معنا: $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda \ge 0$ عندما يكون: $0 \le \lambda \le \lambda_1$ ، ويكون $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda \le 0$ عندما يكون

$\psi \leq \lambda \leq \lambda_1$. لنضع $\theta_-(\lambda_1) = \theta_1$. نرى أنَّ $\frac{\psi-\lambda}{\varphi}$ تتناقص طالما تحقَّقت المتباينة $\lambda \leq \lambda_1$،

ولكنها تتزايد عندما يكون $\lambda_1 < \lambda$.

وإذا كان $\lambda_1 = \lambda$ يكون $\theta - \theta_1 = \varphi$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{\theta-\theta_1}{\theta'_-(\lambda_1)} = \psi - \lambda_1$ ؛ وهذا يعني أنَّ

(θ_1, λ_1) هي نقطة تماسّ خط التماسّ مع خط ψ البياني وفقاً للمتغير θ؛ وخط التماسّ هذا

هو الخط الخارج من النقطة (θ, ψ) التابعة لهذا الخط البياني (انظر الشكلين ٧٠-٧١)؛

ويكون معنا $\theta_1 \leq \theta_0$ ، كما أنَّ تقعُّر ψ في الفسحة $\theta \leq \theta_0$ يُبيّن أنَّ θ_1 دالة تناقصية

للمتغيِّر θ وأنَّ $\theta_0 = \theta_1$ عندما يكون $\theta = \theta_0$.

ملاحظة: لتكن p قيمة المشتقّة $\frac{d\lambda_1}{d\theta_1}$ عندما يكون: $\theta = \theta_0$ ، أيْ أنـّها ظلّ زاوية الانحدار

لخط التماسّ على نقطة الانحراف. ليكن $\theta = \theta_0 + u$ ، ولتكنَ $\psi = \lambda_0 + pu + qu^3 + \ldots$

القيمة الموافقة لِـ ψ عندما تقترب u من 0 وحيث تكون q قيمة $\frac{1}{6}\frac{d^3\lambda_1}{d\theta_1^3}$ عندما يكون $\theta = \theta_0$.

إنَّ خطَّ التماسّ، لخطّ ψ البياني، الذي يمرُّ بالنقطة (θ, ψ)، يمسّ هذا الخط البياني على

النقطة (θ_1, λ_1) حيث يكون: $\theta_1 = \theta_0 - v$ ، $\lambda_1 = \lambda_0 - pv - qv^3 - \ldots$ وَ $\frac{d\lambda_1}{d\theta_1} = p + 3qv^2 + \ldots$ ؛

فيكون معنا:

$$\lambda_1 + \frac{d\lambda_1}{d\theta_1}(\theta - \theta_1) = \lambda_0 + pu + 3quv^2 + 2qv^3 + \ldots = \psi = \lambda_0 + pu + qu^3 + \ldots$$

يكون معنا إذاً: $3uv^2 + 2v^3 = u^3$ ، وهذا ما يعطي $\frac{v}{u} = \frac{1}{2}$ ؛ وهكذا فإنَّ مشتقَّة λ_1 بالنسبة إلى

لمتغيّر θ تـُساوي $-\frac{p}{2}$ عندما يكون $\theta = \theta_0$.

عندما يكون $2\alpha-\beta=\theta$ ، تبلغ θ_1 حداً أدنى $\theta_{1,m}$، كما تبلغ λ_1 حداً أدنى $\lambda_{1,m}$. وعندما يكون $2\alpha-\beta-u=\theta$ ، كنا قد رأينا أنَّ $\pi-v=\psi$ مع $\sqrt{\dfrac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}\approx v$ عندما تقترب u من 0 . إذا كانت القيمة $2\alpha-\beta-u=\theta$ تتوافق مع $\theta_{1,m}+w=\theta_1$ ، يكون معنا:

$$\lambda_1=\lambda_{1,m}+\lambda'_{1,m}w+qw^2+\ldots \quad \text{و} \quad \lambda'_1=\lambda'_{1,m}+2qw+\ldots,$$

فإذاً:

$$\lambda_{1,m}+\lambda'_{1,m}w+qw^2+\ldots+(\lambda'_{1,m}+2qw+\ldots)(2\alpha-\beta-u-\theta_{1,m}-w)=\psi$$

$$\lambda_{1,m}+\lambda'_{1,m}(2\alpha-\beta-\theta_{1,m})-\lambda'_{1,m}u+2qw(2\alpha-\beta-\theta_{1,m})-qw(2u+w)=$$

$$\pi-\lambda'_{1,m}u+2qw(2\alpha-\beta-\theta_{1,m})+\ldots=$$

وهكذا يكون: $v\approx\sqrt{\dfrac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}\approx-2qw(2\alpha-\beta-\theta_{1,m})$؛

فنرى أنَّ $q<0$ وأنَّ:

$$\frac{\lambda_1-\lambda_{1,m}}{-u}\approx\frac{w}{u}\approx-\lambda'_{1,m}\frac{\lambda'_{1,m}}{q(2\alpha-\beta-\theta_{1,m})}\sqrt{\frac{\sin\beta}{2u\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}$$

تقترب من $-\infty$ عندما يقترب u من 0. فإذاً، يكون خط التماسّ على منحني النهاية عمودياً عندما يكون $2\alpha-\beta=\theta$.

وينبغي أن نفرض $\theta_0\geq 0$، في الحالة التي يكون فيها $\beta>\alpha$، لكي نضمن صحّة المتباينة الثانية. ولقد رأينا(في شرح القضية ١٤) أنَّ ذلك يُعادل $\alpha\geq\alpha_1(\beta)$، حيث يكون:

$$\cos^2\alpha_1(\beta)=\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{1+\sin^2\frac{\beta}{2}}\cos\frac{\beta}{2}.$$

إذا كان $\alpha<\alpha_1(\beta)$، تتحقّق المتباينة الثانية إذا كان $0<\theta_0\leq\theta$، أو إذا كان $\theta_0<\theta$ مع $\lambda\leq\lambda_1<\psi$.

القسم الثالث : دراسة $\xi = \sin(\alpha-\theta)\frac{\psi-\lambda}{\varphi}$ كدالة للمتغير θ

يكون معنا: $\xi = \frac{\overset{\frown}{CL}}{\overset{\frown}{LO}} = \frac{LS}{\overset{\frown}{LO}} \cdot \frac{\overset{\frown}{CL}}{LS}$ ،

حيث يكون:

$$r\sin(\alpha-\theta)\left(1-\frac{\cos\psi}{\cos\lambda}\right) = LW - SW = LS$$

لأنَّ $r\sin(\alpha-\theta)\cos\psi = WG = SW\cos\lambda$. وهكذا يكون:

$$\sin(\alpha-\theta).\frac{\cos\lambda-\cos\psi}{\varphi}.\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi} = \xi . \qquad (6)$$

ويساوي المضروب الثاني في الجهة اليسرى من هذه المعادلة:

$$\frac{t\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}.\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$ ،

وفقاً للمعادلة (2)؛ وهو بالبداهة دالة تناقصية للمتغيّر $\varphi = \theta - \underline{\theta}(\lambda)$، فيكون أيضاً دالّة تناقصية للمتغيّر θ (ولنذكّر بأنَّ $t \geq 0$). يبقى علينا إذاً أنْ ندرس المضروب الأول $\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi}$. إنَّ لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi} = \frac{\cos\lambda-\cos\psi-(\psi-\lambda)\sin\psi}{(\cos\lambda-\cos\psi)^2} .$$

لذلك تكون $\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi}$ دالة تناقصية للمتغيِّر ψ، إذا اشترطنا أنَّ:

$$0 \leq (\psi-\lambda)\sin\psi + \cos\psi - \cos\lambda \text{؛} \qquad (7)$$

يجب أنْ ندرس هذه المتباينة في الفسحة $\lambda \leq \psi \leq \pi$ (حيث تكون λ ثابتة). ولكنَّ العبارة:

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\big((\psi-\lambda)\sin\psi + \cos\psi - \cos\lambda\big) = (\psi-\lambda)\cos\psi$$

لها إشارة $\cos\psi$: فالجهة اليمنى من (7) تتزايد في الفسحة $\lambda \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ ، ثم تتناقص في الفسحة $\frac{\pi}{2} \le \psi \le \pi$. وإذا كان $\lambda \le \frac{\pi}{2}$، نكون دائماً في الحالة الثانية، وبما أنَّ الجهة اليمنى في (7) تنعدم عندما يكون $\psi = \lambda$ ، فإنّها تبقى سالبة، فلذلك لا يُمكن أن تتحقَّق (7)، كما أنَّ العبارة $\frac{\psi - \lambda}{\cos\lambda - \cos\psi}$ تتزايد مع ψ. وإذا كان معنا، بعكس ذلك، $\lambda < \frac{\pi}{2}$ ، فإنَّ الجهة اليمنى في (7) تتزايد من 0 إلى قيمة قصوى، هي $\frac{\pi}{2} - \lambda - \cos\lambda > 0$، تبلغها عندما يكون $\psi = \frac{\pi}{2}$، ثم تتناقص حتى القيمة $(-1 - \cos\lambda) = -2\cos^2\frac{\lambda}{2} < 0$، التي تبلغها عندما يكون $\psi = \pi$.

توجَد إذاً قيمة (وحيدة) $f(\lambda) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ لِـ ψ تُعدِمُ العبارة $[(\psi - \lambda)\sin\psi + \cos\psi - \cos\lambda]$، وتكون (7) محقّقة إذا كان $\lambda \le \psi \le f(\lambda)$ ، ولا تكون محقّقة إذا كان $\psi > f(\lambda)$.

لندرس الدالة $f(\lambda)$ المعرَّفة بالمعادلة :

$$0 = (f(\lambda) - \lambda)\sin f(\lambda) + \cos f(\lambda) - \cos\lambda \quad (8)$$ ، مع $\frac{\pi}{2} \le f(\lambda) < \pi$ ،

حيث يكون $0 \le \lambda \le \frac{\pi}{2}$. فإذا كان $\lambda = 0$، نحصل على

$$f(0)\sin f(0) + \cos f(0) - 1 = 0$$ ،

أيْ على $f(0) = \operatorname{tg}\frac{f(0)}{2}$ ، وهذا ما يعطي:

$f(0) = \delta = 2{,}33112237$ زاوية نصف قطرية (انظر شرح القضية ١٤) ؛

إذا كان $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ، نحصل على: $0 = \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\sin f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ، أيْ على: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$، والحل الوحيد لهذه المعادلة الأخيرة في الفسحة $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ هو $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. ويكون معنا إذا اشتققنا (8):

$$0 = (f'(\lambda) - 1)\sin f(\lambda) + \{(f(\lambda) - \lambda)\cos f(\lambda) - \sin f(\lambda)\} f'(\lambda) + \sin\lambda$$ ،

وهذا ما يُعطي:

$$\frac{\operatorname{tg} f(\lambda)}{\operatorname{tg}\frac{f(\lambda)+\lambda}{2}} = \frac{\sin f(\lambda)-\sin\lambda}{\cos\lambda-\cos f(\lambda)}\operatorname{tg} f(\lambda) = f'(\lambda) \qquad (9)$$

لأنَّ $\frac{\cos\lambda-\cos f(\lambda)}{\sin f(\lambda)} = f(\lambda)-\lambda$.

ونرى أنَّ $f'(\lambda) \le 0$ محقَّقة طالما بقيت $f(\lambda)+\lambda \le \pi$ (لأن $\operatorname{tg} f(\lambda) \le 0$).

إذا كان $\lambda = 0$ ، يكون معنا $\pi > \delta = f(0) = f(\lambda) + \lambda$

وَ $f'(\lambda) + 1 = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} + 1 = 0,54893386 > 0$، فتتزايد إذاً $f(\lambda)+\lambda$ بدءاً من δ طالما بقيت المتباينةُ $f'(\lambda) \ge -1$ محقَّقةً. وإذا وُجدت قيمة للمتغيّر λ بحيث يكون $f'(\lambda) = -1$ ، يكون لدينا، لهذه القيمة،

$$\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{f(\lambda)+\lambda}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{f(\lambda)+\lambda}{2} = \operatorname{tg} f(\lambda) \text{ ،}$$

فنستنتج أنَّ $\lambda = 2\pi - 3f(\lambda)$ ، وهذا ما يفرض $f(\lambda) \le \frac{2\pi}{3}$.

إذا وضعنا $\lambda = 2\pi - 3f(\lambda)$ في (8)، يكون معنا:

$$= (4f(\lambda) - 2\pi)\sin f(\lambda) + \cos f(\lambda) - \cos 3f(\lambda)$$

$$0 = 2\sin f(\lambda)\,(2f(\lambda) - \pi + \sin 2f(\lambda)) \text{ ،}$$

وهذا ما يعطي $f(\lambda) = \frac{\pi}{2}$ ، فإذاً $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ، وهي القيمة التي تجعل (9) غير محدودة . لنفرض $\lambda = \frac{\pi}{2} + u$ وَ $f(\lambda) = \frac{\pi}{2} + v$ ؛ يكون معنا:

$$f'(\lambda) = \frac{\operatorname{tg}\frac{u+v}{2}}{\operatorname{tg} v} \text{ ،}$$

مع $v \approx f'\left(\frac{\pi}{2}\right)u$ عندما يقترب u من 0 . فنستنتج من ذلك، عند بلوغ النهاية، أنَّ:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}{2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}،$$

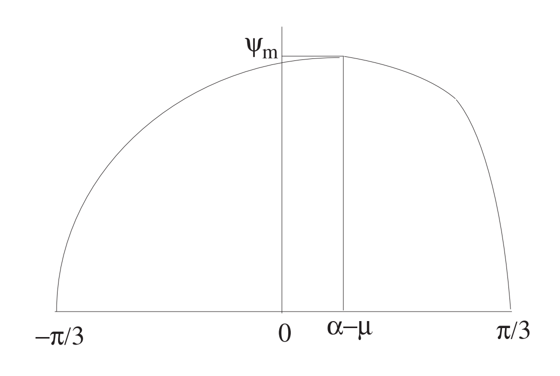
وهذه المعادلة تعطي $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ (وهو جذرها السالب الوحيد). والخلاصة إذاً هي أنَّ $f'(\lambda) > -1$ وأن $f(\lambda) + \lambda$ تتزايد من δ إلى π فتبقى إذاً محدودة من الأعلى بِـ π ؛ فينتج عن ذلك أن $f'(\lambda) \leq 0$ وأن f تتناقص من δ إلى $\frac{\pi}{2}$ إذا كان $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$.

نحن نعرف أنَّ ψ دالة تزايدية للمتغيِّر θ إذا كان $\alpha < \beta$ أو إذا كان $\alpha \geq \beta$ معَ $\theta \leq \alpha - \mu$، فينتج عن ذلك أنَّ $\frac{\psi - \lambda}{\cos\lambda - \cos\psi}$ دالة تناقصية للمتغير θ إذا كان $\alpha < \beta$ مع $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ وَ $\lambda \leq \psi \leq f(\lambda)$، أو إذا كان $\alpha \geq \beta$ مع $\theta \leq \alpha - \mu$، وهي الحالة التي يكون فيها:

$$\lambda \leq \psi \leq \psi_m \leq \frac{\pi}{2}.$$

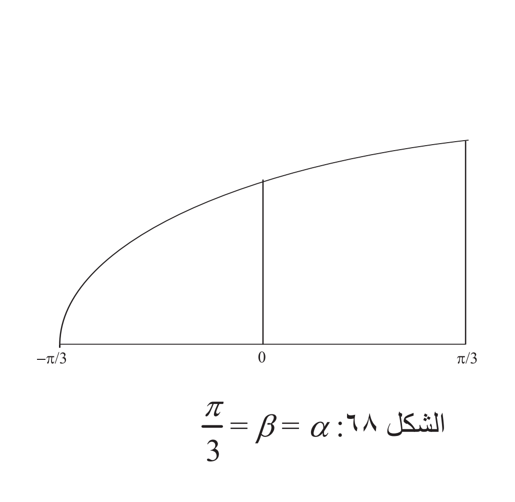
ويمكن أن نعالج أيضاً الفسحة $\alpha - \mu \leq \theta \leq \beta$ ، في الحالة التي يكون فيها $\alpha \geq \beta$، بفضل العبارة: $\xi = \frac{LO}{\widehat{LO}} \cdot$!Error. $\frac{\widehat{CL}}{CL} = \frac{\psi-\lambda}{2\sin\frac{\psi-\lambda}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\psi-\lambda}{2}\sin(\alpha-\theta)}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$،

حيث يكون المُعامِل الأخير تناقصياً كدالة للمتغيِّر φ، فيكون إذاً تناقصياً كدالة للمتغيِّر θ. أما المُعامِلان الأوّلان فهما دالّتان تناقصيتان للمتغيِّر θ، إذا كانتا تناقصيتين للمتغيِّر ψ، أي إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta \geq \alpha - \mu$. وهكذا تتناقص ξ، عندما يكون $\alpha \geq \beta$ ، كدالة للمتغيّر θ في الفسحة $[-\beta, \beta]$، إذا كان $0 \leq \lambda \leq \psi$، أي عندما تكون النقطة (θ, λ) تحت الخط البياني لِـ ψ (انظر الشكلين ٦٧ وَ ٦٨).



الشكل ٦٧ : $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$

$\alpha - \mu = 0{,}282288719$، $\psi_m = 1{,}11197574$



الشكل ٦٨: $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$

إنَّ تناقصية ξ مُثبتَة، في الحالة التي يكون فيها $\beta < \alpha$، إذا تحقَّق الشرطان $\frac{\pi}{2} \leq \lambda$ وَ $f(\lambda) \leq \psi$، أيْ عندما يكون $\theta_{_}(f(\lambda)) \leq \theta$؛ وعندما يكون $\theta = \theta_{_}(f(\lambda))$ ، يكون معنا $\frac{d\xi}{d\theta} < 0$ ، ولكن $\frac{d\xi}{d\theta}$ تصبح لانهائية وموجبة عندما يكون $\theta = 2\alpha - \beta$. فتوجَد إذاً قيمة θ_4 للمتغير θ، بين $\theta_{_}(f(\lambda))$ وَ $2\alpha - \beta$ ، بحيث تمر فيها المشتقّة $\frac{d\xi}{d\theta}$ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة؛ ويمكن أن نُثبت أنَّ هذه القيمة وحيدة وأنَّ ξ تتناقص في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_4$ ، قبل أن تتزايد بعد ذلك. وتوجد كذلك، إذا كان $\frac{\pi}{2} \geq \lambda$ ، قيمة θ_4 بين $\theta_{_}(\lambda)$ وَ $2\alpha - \beta$ بحيث تتناقص ξ حتى تصل θ إلى θ_4 ، ثم تتزايد بعد ذلك. أما المنطقة، من المستوي (θ, λ)، التي يكون فيها قول ابن الهيثم صحيحاً فهي محدَّدة بالمتباينة:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\theta} = \frac{\psi - \lambda}{\varphi}\cos(\alpha - \theta) - \frac{\varphi\psi' - \psi + \lambda}{\varphi^2}\sin(\alpha - \theta) \leq 0 ،$$

أي بالمتباينة:

$$0 \geq ((\theta - \theta_{_}(\lambda))\ \psi' - \psi + \lambda)\sin(\alpha - \theta) - (\theta - \theta_{_}(\lambda))(\psi - \lambda)\cos(\alpha - \theta) \qquad (10)$$

وتُحدَّد θ_4 بواسطة المعادلة في (10).

ملاحظة: إذا كان $\theta \leq \alpha - \mu'$ ، يكون $\psi \leq \frac{\pi}{2}$ ويكون معنا $\lambda \leq \psi \leq f(\lambda)$ ، فيكون إذاً $\frac{d\xi}{d\theta} \leq 0$ ، ونستنتج من ذلك أنَّ: $\theta_4 \geq \alpha - \mu'$.

يُمكن أن نتحقَّق أنَّ θ_4 دالة تناقصية للمتغيِّر λ . وحدُّها الأدنى هو $\theta_(\lambda)$ لأنَّ $\lambda \leq \psi$.

لنجعل $\theta = \theta_(\lambda) + u$ في المعادلة المأخوذة من (10). يكون معنا: $\psi = \lambda + u\psi'_* + u^2\frac{\psi''_*}{2} + \ldots$ وَ $\psi' = \psi'_* + u\psi''_* + \ldots$ ، إذا رمزنا بـِ ψ'_* وَ ψ''_* إلى قيمتيْ المشتقَّتين عندما يكون $\theta = \theta_(\lambda)$.

فإذا وضعنا ذلك في (10) نجد:

$$u^2\left[\frac{1}{2}\psi''_*\sin(\alpha - \theta_(\lambda)) - \psi'_*\cos(\alpha - \theta_(\lambda))\right] + \ldots.$$

وهكذا يُحسَب حدّ θ_4 الأدنى بواسطة المعادلة:

$$0 = \psi''\sin(\alpha - \theta) - 2\psi'\cos(\alpha - \theta). \qquad (11)$$

وإذا استخدمنا المعادلة (6) الواردة في شرح القضية ١٤، تتحوَّل هذه المعادلة إلى:

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = 2X(A - BX) \qquad (12)$$

أيْ إلى: $R(X) = 2X(A - BX)\,Q(X) - P(X) = 0$.

يكون معنا:

$$R(X) = BX^4 - 3AB^2X^3 + BX^2(3A^2 + 2B^2 - 2) - A^3X + B - B^3 ،$$

حيث يكون $A = \cos\alpha$ ، $B = \cos\beta$ وَ $X = \cos(\alpha - \theta)$. إذا كان $\theta = \alpha - \mu'$ ، أيْ إذا كان: $X = \cos\mu' = \frac{B}{A}$ ، يكون معنا:

$$R\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A^4}B(1 - A^2)(A^2 - B^2)^2 > 0 ،$$

وإذا كان $\theta = 2\alpha - \beta$ وَ $X = \cos(\beta - \alpha)$ ، نجد أنَّ:

$$R(\cos(\beta - \alpha)) = -\sin^2\beta\sin^3(\beta - \alpha)\sin\alpha < 0.$$

إنَّ دراسة مشابِهة لتلك التي نجدها في شرح القضية ١٤ تُبيِّن أنَّ $R(X)$ تتناقص من $R\left(\frac{B}{A}\right)$ إلى $R(\cos(\beta - \alpha))$ في الفسحة $\frac{B}{A} \leq X \leq \cos(\beta - \alpha)$. وهكذا تنعدم R عندما تبلغ $X = \cos(\alpha - \theta)$ قيمةً محدَّدة متوافقة مع القيمة الدنيا المطلوبة $\theta_{4,m}$ لِـ θ_4 .

إنَّ قول ابن الهيثم صحيح في الحالة التي يكون فيها $\theta_{4,m} \leq 0$، وهذا ما يعادل $0 \leq R(\cos\alpha)$. ولكنَّ:

$$(1-B)\,(A^4\,(3B-1)+B(B+1)\,(1-2A^2)) = R(A) = R(\cos\alpha)$$ ؛

فتكون المتباينة المطلوبة إذاً:

$$0 \leq A^4\,(3B-1) - 2B(B+1)\,A^2 + B(B+1).$$

لنضع $(3B-1)\,x^2 - 2\,B(B+1)\,x + B(B+1) = S(x)$ ؛ فيكون معنا:

$$0 < B(B-1)^2\,(3B^2+3B+1) = S(B^2) \quad \text{و} \quad 0 > -(B-1)^2 = S(1)$$ ؛

فيكون إذاً لـِ S جذرٌ x_0 بين B^2 وَ 1 ، كما أنَّ $\theta_{4,m} \geq 0$ تعادل:

$\cos^2\alpha_0(\beta) = A^2 \leq x_0$. وهذا ما يعادل الشرط : $\alpha \geq \alpha_0\,(\beta)$ ، مع:

$$\cos^2\alpha_0(\beta) = \frac{\cos\beta\cos\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{2\cos\beta}}{3\cos\beta - 1} = 2\cos\frac{\beta}{2}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}\,\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta}}} \qquad (13)$$ ،

أي:

$$tg^2\alpha_0(\beta) = \sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta}}.$$

نرى أنَّ $\alpha_0\,(0) = 0$ وأنَّ $\alpha_0^2 \approx \frac{\beta^2\sqrt{2}}{4}$ إذا كانت β تسعى إلى 0؛ وهكذا يكون:

$$\left.\frac{d\alpha_0}{d\beta}\right|_{\beta=0} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} = 0{,}594603558 \quad \text{وَ} \quad \left.\frac{d\beta}{d\alpha_0}\right|_{\alpha_0=0} = \sqrt[4]{8} = 1{,}68179283.$$

ويكون معنا أيضاً: $\alpha_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ وَ $\left.\frac{d\beta}{d\alpha_0}\right|_{\alpha_0=\frac{\pi}{2}} = \lim_{\alpha_0\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha_0} = 0$.

لقد رسمنا على الشكل ٥٠ الخط البياني لـِ α_0 كما رسمنا على الشكل ٥١ الحد الموافق للنقطة Ω.

يتمّ الحصول على القيمة العظمى $\theta_{4\,M}$ لـِ θ_4 عندما يكون $\lambda = 0$، وهي القيمة التي رمزنا إليها بـِ θ_4 في شرح القضية ١٤.

القسم الرابع: أمثلة

لقد اخترنا نفس القيم العددية التي اخترناها في شرح القضية ١٤: $\beta = \frac{\pi}{3}$ وَ $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ ؛ $\frac{\pi}{3}$ ؛

1؛ 0,8 ؛ 0,75 ؛ $\frac{\pi}{5}$ ؛ 0,55 ؛ 0,524 وَ $\frac{\pi}{12}$ (الأشكال ذات الأرقام من ٦٧ إلى ٧٥).

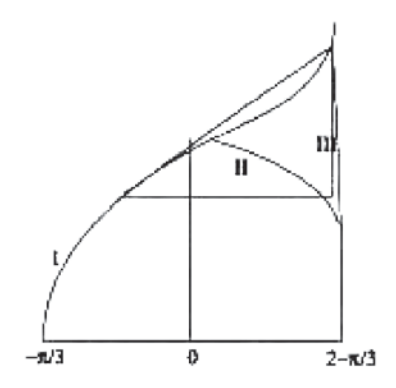
يكون معنا : $\alpha_0\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = 0,649766287 بين 0,75 وَ $\frac{\pi}{5}$ وَ $\alpha_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = 0,932458266، بين

1 وَ 0,8 . لقد رسمنا على الأشكال ذات الأرقام من ٦٩ إلى ٧٥ ثلاثة خطوط مُنْحَنِيَة مُرقَّمة بِـ I، II ، III على التوالي. الخط المنحني I هو الخط البياني لـِ ψ كدالة للمتغيّر θ؛ وهو مرسوم بين النقطة $(-\beta, 0)$ والنقطة $(2\alpha - \beta, \pi)$، إذ إنَّ الدالَّة تزايدية. والخط المنحني II هو الخط البياني لـِ λ_1 كدالة للمتغيّر θ؛ وهو مرسوم بين النقطة(θ_0, λ_0)، نقطة انحراف الخط I، والنقطة $(2\alpha - \beta, \lambda_{1m})$ ؛ ويكتمل هذا الخط بالخط المستقيم العمودي:

$\theta = 2\alpha - \beta$، $0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,m}$.

والخطُّ المماسّ للخط المنحني I على النقطة ذات الإحداثية الثانية العمودية λ_1 يقطع من جديد هذا الخط على النقطة ذات الإحداثية الأولى الأفقية θ (الأشكال ذات الأرقام من ٦٩ إلى ٧١)؛ والدالة λ_1 هي تناقصية للمتغير θ. والخط المنحني III هو المكان الذي تتحرّك فيه النقاط(θ_4, λ)؛ وهو يصل بين النقطة $(\theta_{4,m}, \lambda_{4,m})$ والنقطة $(\theta_{4,M}\ , 0)$. والدالة λ هي تناقصيّة للمتغيِّر θ_4.

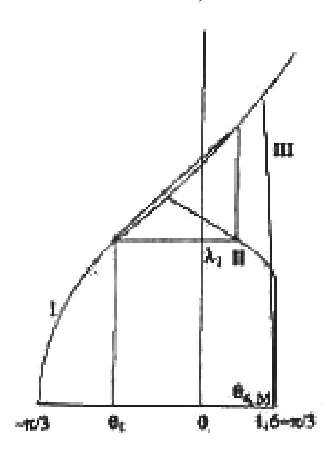
وتكون المتباينة الأولى لابن الهيثم صحيحة عندما تكون النقطة (θ, λ) تحت الخطين المنحنيين I وَ III ، بينما تكون المتباينة الثانية صحيحة عندما تكون النقطة (θ, λ) تحت الخطين المنحنيين I وَ II . وهكذا تكون هاتان المتباينتان محقَّقتين في المنطقة المُحَدَّبة الموجودة تحت الخطوط الثلاثة I ، II وَ III.



الشكل ٦٩ : $\alpha = 1$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = 0,220685446$ ، $\lambda_0 = 1,37400009$

$\theta_{1,m} = -0,833589085$ ، $\lambda_{1,m} = 0,663153782$ ، $\theta_{4,m} = 0,876987428$ ،

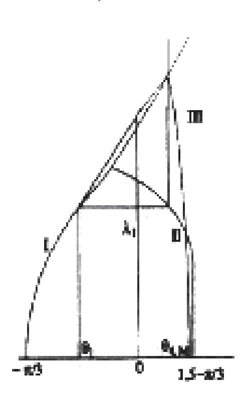
$\lambda_{4,m} = 1,92921309$ ، $\theta_{4,M} = 0,9500790346$



الشكل ٧٠ : $\alpha = 0,8$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,237427409$ ،

$\lambda_0 = 1,333256925$ ، $\theta_{1,m} = -0,8722605915$ ، $\lambda_{1,m} = 0,644350074$ ،

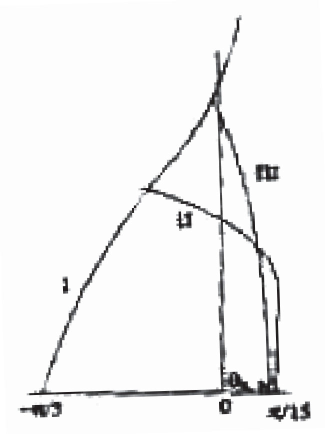
$\theta_{4,m} = 0,349257621$ ، $\lambda_{4,m} = 1,98972898$ ، $\theta_{4,M} = 0,537776499$



الشكل ٧١ : $\alpha = 0,75$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = 0,306153376$ ، $\lambda_0 = 1,33286849$ ؛

$\theta_{1,m} = -0,881787545$ ، $\lambda_{1,m} = 0,642761272$ ؛ $\theta_{4,m} = 0,4346042281$ ،

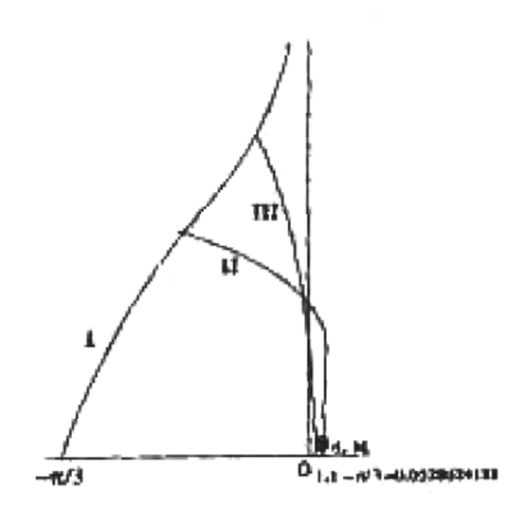
$\lambda_{4,m} = 1,97974742$ ؛ $\theta_{4,M} = 0,229510063$



الشكل ٧٢ : $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,450887379$ ، $\lambda_0 = 1,3408219$

$\theta_{1,m} = -0,904851513$ ، $\lambda_{1,m} = 0,644432659$ ، $\theta_{4,m} = -0,0472107752$ ،

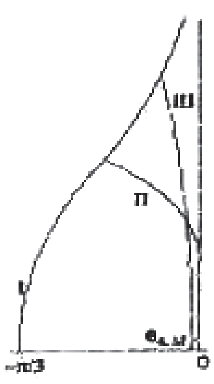
$\lambda_{4,m} = 1,93620825$ ، $\theta_{4,M} = 0,1831447956$



الشكل ٧٣ : $\alpha = 0,55$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,53311435$ ، $\lambda_0 = 1,35133667$

$\theta_{1,m} = -0,919752538$ ، $\lambda_{1,m} = 0,649924588$ ، $\theta_{4,m} = -0,213335252$ ،

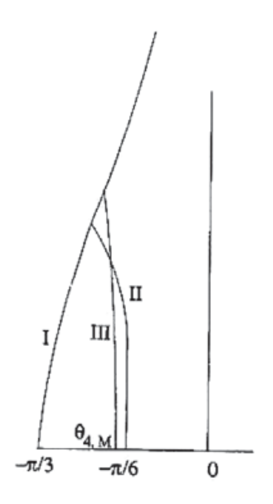
$\lambda_{4,m} = 1,89753524$ ، $\theta_{4,M} = 0,0211388793$



الشكل ٧٤ : $\alpha = 0,524$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,55910491$ ، $\lambda_0 = 1,35583723$

$\theta_{1,m} = -0,9247411$ ، $\lambda_{1,m} = 0,652562409$ ، $\theta_{4,m} = -0,266150532$ ، $\lambda_{4,m} = 1,88337596$ ،

$\theta_{4,M} = -0,0326171933$



الشكل ٧٥ : $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,801761542$ ، $\lambda_0 = 1,43427582$
$\theta_{1,m} = -0,978448494$ ، $\lambda_{1,m} = 0,704691461$ ، $\theta_{4,m} = -0,724212075$ ،
$\lambda_{4,m} = 1,72529646$ ، $\theta_{4,M} = -0,566379471$

إنَّ هذه الدراسةَ التحليلية الطويلة، الموضَّحةَ بالأمثال والأشكال، تـُبيِّن أنَّ أقوال ابن الهيثم تـُعَبِّر عن اتجاه التغيُّر لبعض الدوال المتسامية (*fonctions transcendantes*) الكثيرة التعقيد. إنَّ صحّة هذه القضايا خاضعةٌ لبعض الشروط التي لم يكن باستطاعة ابن الهيثم توضيحها؛ وذلك أنَّ صياغتها تتعلّق برياضيات لم ترَ النور إلا بعد ثمانية قرون من عصره.

ويبقى أنَّ دراسةَ تغيُّر الدوال المثلثاتية، التي قام بها ابن الهيثم بسبب حاجته إليها في بحوثه الفلكية، فتحت الباب أمام ميدان جديد للبحث الرياضي، حيث تـُنَسَّق الطرائق التي يمكن أن تتعلّق في آن واحد بالدوال وبالمتناهيات في الصغر.

٢ـ علم الفلك

يشرع ابن الهيثم مباشرة، في هذا القسم الثاني من كتابه، في دراسة الحركات الظاهرة للكواكب السبعة؛ وهو يبدأ بدراسة النيِّرين.

٢ـ١ـ الحركة الظاهرة للكواكب السبعة

حركة القمر

يُذكِّر ابن الهيثم أولاً ببعض النتائج التي أثبتها بطلميوس، لكنه لا يَتَبَنَّى الهيئات الفلكية التي عرضها هذا الأخير في كتاب "المجسطي"، ولا سيَّما أنه قد انتقدها في كتاب "الشكوك على بطلميوس"[١٦]. لنذكِّر الآن ببعض هذه النتائج المعروضة من قبل ابن الهيثم.

- إنَّ مركز القمر، في حركته الظاهرة على الكرة السماوية، يبقى في مستوي دائرة عظمى تحمل اسم الفلك المائل.
- الفلك المائل يقطع دائرة فلك البروج وفقاً لخط العقدتين $N'N$ (انظر الشكل ٧٦)، ويُشكِّل زاوية مع مستوي فلك البروج. اعتبر ابن الهيثم هذه الزاوية ثابتة. وهي في الحقيقة تتغيّر قليلاً جداً وتبقى قريبة من ٥ درجات. وهكذا يبقى الفلك المائل ضمن منطقة البروج.

  وتحدث حركةُ مركز القمر على فلكه المائل بالاتجاه المباشر، أي باتجاه توالي البروج (مدَّة الدورة الكاملة عليه تساوي شهراً).
- وتحدث حركة كل من العقدتين على دائرة البروج بالاتجاه التراجعي، أي إلى خلاف توالي فلك البروج (مدَّة الدورة الكاملة عليه تساوي ثماني عشرة سنة وثمانية أشهر).
- مستوي الفلك المائل يدور حول محور قطبي فلك البروج، وكل نقطة من الفلك المائل للقمر ترسم دائرة حول هذا المحور.
- إذا أرجعنا فلك القمر المائل إلى دائرة معدّل النهار نبيِّن أنَّ فلك البروج يُشكِّل مع مستوي معدّل النهار زاوية قدرها ٢٤ درجة وفقاً لبطلميوس، وَ ′٣١ °٢٣ وفقاً لحساب

[١٦] انظر : الشكوك على بطلميوس"، تحقيق ع. صبرة وَ ن. شهابي (القاهرة ١٩٧١)، ص. ١٥-١٩.

علماء فلك القرن التاسع، وَ ٢٧' ٢٣° وفقاً للحسابات الأكثر تأخّراً؛ كما أنَّ مستوي فلك البروج يقطع مستوي معدّل النهار وفقاً للقطر $\gamma\gamma'$ (γ وَ γ' هما نقطتا الاعتداليْن).

- الفلك المائل يقطع مستوي معدّل النهار وفقاً لقطر هو MM'.
- إنَّ ميلَ الفلك المائل للقمر بالنسبة إلى معدّل النهار متغيِّرٌ، لأن العقدتين N وَ N' ترسمان فلك البروج.

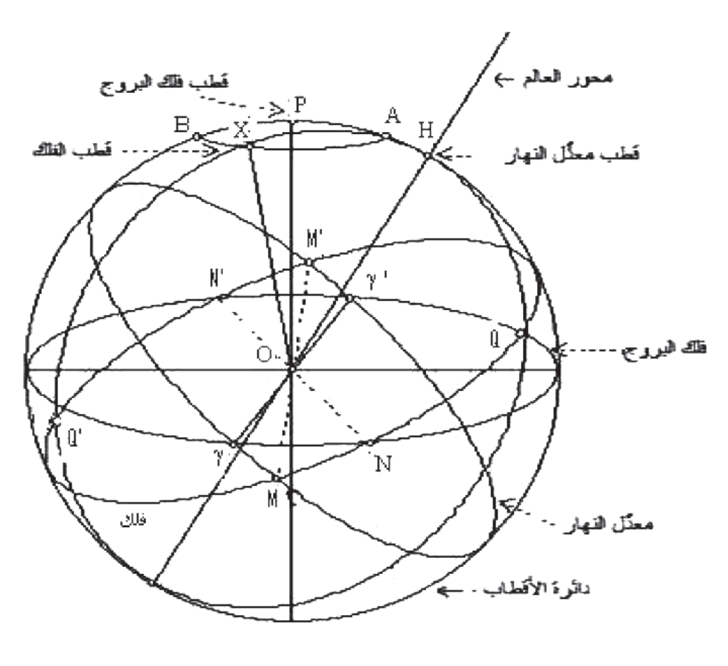
وهكذا فإنَّ ابن الهيثم، بعد أن ذكَّر بهذه النتائج التي اعتبرها مُثبَتَةً- باستثناء النتائج الأخرى التي عرضها بطلميوس- وبعد أن وضَّح المصطلحات، شرع في إعداد الهيئات لحركات الكواكب، بادئاً بهيئة القمر. ولكنه أدخل، لأجل ذلك، مفهوماً جديداً، وهو مفهوم "الزمان المُحصَّل". وهو يرمز بهذه العبارة إلى مدّة الحركة اليومية للقمر(أو لأيِّ كوكب بشكل عام) من معدّل النهار إلى دائرة نصف النهار، وهذه المدّة مُمَثَّلة بقوس من دائرة. كل الحركات التي تدخل في تركيب الحركات الظاهرة هي دائرية مستوية، وهذا ما يسمح تحديداً بقياس الزمن المحصَّل بقوس من دائرة، فيُمكن بذلك إخضاع الزمن المحصَّل لنظرية النسب.

إنَّ الحركة الظاهرة للقمر معقَّدة. وهي نتيجة لثلاث حركات. **الحركة الأولى** هي في مستوي الفلك المائل من الشمال إلى الجنوب، وبالعكس، بالنسبة إلى معدّل النهار- اتجاه هذه الحركة مباشر، أي من الغرب نحو الشرق. **الحركة الثانية** هي حركة الفلك المائل نفسه حول محور فلك البروج أي حركة العقدة. **والحركة الثالثة**، أخيراً، هي الحركة اليومية.

هذا التركيب يولِّد ظاهرة أثارت اهتمام ابن الهيثم إلى حد بعيد. لنفرض أنَّ القمر موجود على النقطة B من فلكه. والنقطة B هي نقطة على الكرة السماوية، فهي تنتقل إذاً بالحركة اليومية على دائرة موازية لدائرة معدّل النهار. والقمر يُشارك أيضاً في هذه الحركة. والنقطة B هي نقطة على الفلك المائل، فهي إذاً خاضعة أيضاً لحركة العقدة على دائرة موازية لفلك البروج. والقمرُ نفسه أيضاً خاضعٌ لهذه الحركة. وهو يتحرَّك، بالإضافة إلى ذلك، بحركته الخاصة على الفلك المائل. وهكذا، فإنَّ النقطة التي تبلغها النقطة B بعد فترة t من الزمن، لا يُمكن أن تتطابق مع النقطة التي يبلغها القمر. وهذا الابتعاد بين هاتين النقطتين هو الذي تجب معرفة كيفية تحديده، وهو الذي يُشكّل الموضوع الرئيسيّ لدراسة ابن الهيثم، كما سنرى فيما يلي.

القضية ١٦- ليكن O مركز العالم، P القطب الشمالي لفلك البروج وَ H القطب الشمالي لمعدّل النهار. الدائرة العظمى HP تُسمَّى دائرة الأقطاب.

إذا كانت النقطة X القطب الشمالي للفلك المائل، تكون الزاوية $\widehat{XOP}$ مساوية لميل الفلك بالنسبة إلى مستوي فلك البروج، فإذاً $\widehat{POX} \cong 5°$ ، وهي الزاوية التي اعتبرها ابن الهيثم ثابتة. فإذاً عندما ترسم العقدة N فلك البروج يرسم القطب X دائرة حول المحور OP؛ وهذه الدائرة تقطع دائرة القطبين على نقطتين: A بين P وَ H، وَ B من الجهة الأخرى بالنسبة إلى النقطة P.



الشكل ٧٦

وإذا أخذنا أقواساً من دائرة عظمى، يكون معنا، لكل موضع للنقطة X:

$\widehat{PX} = \widehat{PB} = \widehat{PA}$ وَ $\widehat{HA} < \widehat{HX} < \widehat{HB}$.

تتزايد القوس $\widehat{HX}$ ، خلال الدوران، من $\widehat{HA}$ إلى $\widehat{HB}$ ، ثم تتناقص من $\widehat{HB}$ إلى $\widehat{HA}$.

ويكون: $\widehat{HB} \cong 23°27' + 5°$ وَ $\widehat{HA} \cong 23°27' - 5°$ ، وفقاً للقيم الحالية.

يقطع الفلك المائل دائرة معدّل النهار وفقاً للقطر MM'؛ فيكون للفلك المائل نصف دائرة شمال دائرة معدّل النهار ونصف دائرة جنوب دائرة معدّل النهار. يتوافق مُنتصَف نصف الدائرة الشمالي مع الحدّ الأقصى للميل الشمالي للقمر، ويتوافق مُنتصَف نصف الدائرة الجنوبي مع الحدّ الأقصى للميل الجنوبي للقمر. وهاتان النقطتان هما نقطتا التقاطع Q وَ Q'

للفلك المائل مع الدائرة العظمى المارّة بالنقطة H قطب دائرة معدّل النهار وبالنقطة X قطب الفلك المائل. فهما إذاً متغيّرتان، ويكون الميلان الموافقان لهما متغيّرين أيضاً.

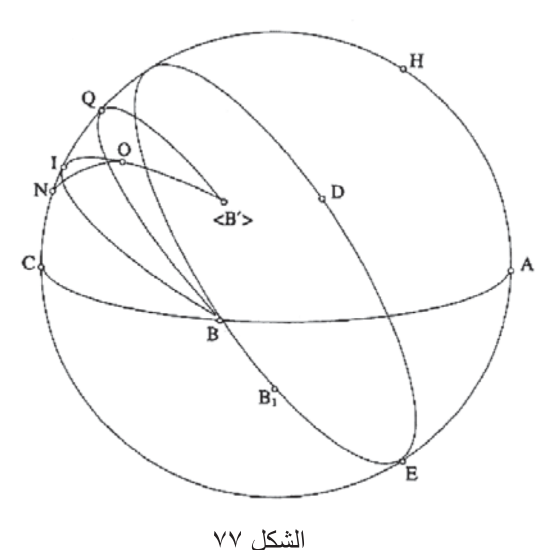
تحدث حركة القمر على فلكه باتجاه توالي البروج، بينما تحدث حركة العقدة N، كأيّ نقطة من الفلك المائل، حول محور فلك البروج OP، إلى خلاف توالي البروج[١٧].

دراسة حركة القمر بين شروقه ومروره على دائرة نصف النهار

ليكن ABC النصف الشرقي لدائرة الأفق وَ BED نصف فلك القمر الذي هو تحت الأفق، وليكن H القطب الشمالي لمعدّل النهار(الشكل ٧٧).

نفرض أنَّ القمر هو أولاً في النقطة B وأنه ينتقل على فلكه من الشمال نحو الجنوب، من النقطة B نحو النقطة E. (وهو يرسم كل يوم قوساً مقدارها $13°$ بالاتجاه المباشر).

نرسم الدائرة[١٨] OIB المارة بالنقطة B والتي لها القطب H (الشكل ٧٧).



الشكل ٧٧

ABC الأفق، AHC دائرة نصف النهار، BED الفلك المائل للقمر

H قطب دائرة معدّل النهار، BIO الدائرة الموازية لمعدِّل النهار

أ) إنَّ النقطة B على فلك القمر، تنتقل خلال الحركة اليومية (التي هي حركة سريعة)، على الدائرة BIO باتجاه خلاف توالي البروج، وتمرُّ على دائرة نصف النهار في النقطة I.

[١٧] الاتجاه من الغرب نحو الشرق هو اتجاه توالي البروج، أي الاتجاه المباشر حول محور العالم. أما الاتجاه من الشرق نحو الغرب فهو اتجاه خلاف توالي البروج، أي الاتجاه التراجعي.
[١٨] الحرف O هنا لا يرمز إلى نفس النقطة الموجودة في الشكل ٧٦.

يشارك القمر في الحركة اليومية، ولكنه لا يبقى في النقطة B من الفلك. وعندما يصل إلى دائرة نصف النهار على النقطة N، تكون النقطة B قد تجاوزت النقطة I وتكون في النقطة O على الدائرة BI الموازية لدائرة معدّل النهار؛ فيكون القمر قد اجتاز على فلكه القوس $\widehat{BB_1}$ التي أصبحت في الوضع $\widehat{NO}$ غرب دائرة نصف النهار وجنوب الدائرة BIO الموازية لدائرة معدِّل النهار.

ب) وهذا يفرض أنَّ النقطة B تبقى على الدائرة BI الموازية لدائرة معدّل النهار، أيْ أنَّ ميلها بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار يبقى ثابتاً. ولكن B، نقطة الفلك، خاضعة **لحركة رأس الجوزهر** على فلك البروج (بالاتجاه التراجعي). نخرج من النقطة B قوساً من دائرة QB التي يكون قطبُها قطبَ دائرة البروج؛ الدائرة QB موازية لدائرة البروج، والنقطة B تنتقل إذاً على القوس $\widehat{BQ}$ وتخضع في نفس الوقت للحركة اليومية؛ فهي تصل إذاً إلى نقطة *مختلفة* بشكل عام عن النقطة O.

نفترض، على الشكل، أنَّ القطبين H وَ P موجودان فوق الأفق وأنَّ I وَ Q موجودتان على دائرة نصف النهار وفوق أفق النقطة B.

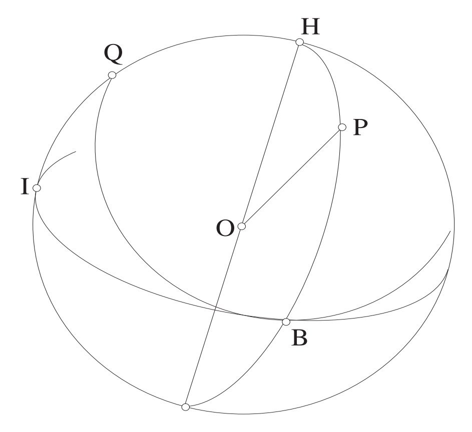
وضع الدائرة QB بالنسبة إلى الدائرة BI

- إذا كانت الدائرة العظمى الخارجة من النقطة H (وهي القطبُ الشمالي لدائرة معدّل النهار) حتّى النقطة B تمرّ بقطب فلك البروج P، تكون الدائرتان BI وَ BQ متماستين في النقطة B (الشكل ٧٨).

إذا كانت P بين H وَ B ، مع $\widehat{BP} < \widehat{BH}$ ، تكون الدائرة BQ عندئذ في شمال الدائرة BI.

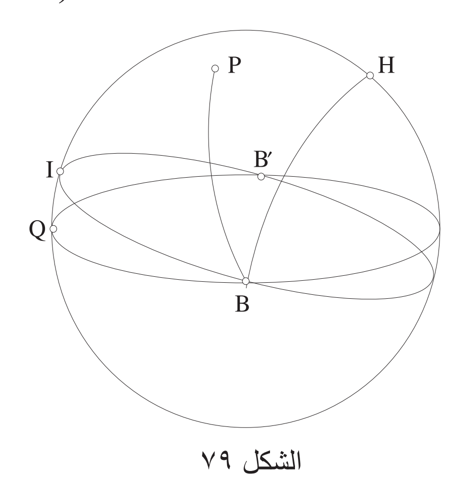
إذا كان $\widehat{BP} < \widehat{BH}$ ، تكون الدائرة BQ عندئذ جنوب الدائرة BI.

وتكون الدائرة BPH عمودية، في الحالتين، على الدائرتين BI وَ BQ.



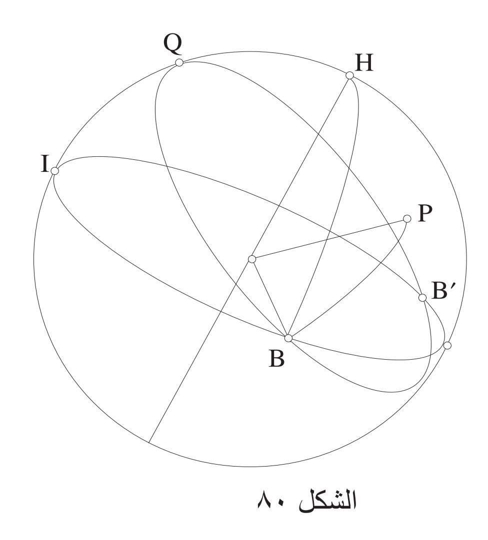
الشكل ٧٨ : $\widehat{BP} < \widehat{BH}$

- إذا كانت الدائرة العظمى الخارجة من النقطة H حتّى النقطة B لا تمرّ بقطب فلك البروج P، تتقاطع الدائرتان BI وَ BQ على النقطة B وعلى نقطة ثانية B' (الشكل ٧٩).
- إذا كانت الدائرة العظمى، الخارجة من النقطة P إلى النقطة B تُشكِّل مع القوس $\widehat{BI}$ زاوية حادّة، تكون $\widehat{PBI}$ حادّة فيكون عندئذ $\widehat{PBI} > \widehat{HBI}$ (زاوية قائمة)؛ فتكون القوس BQB' التي تقطع دائرة نصف النهار فوق الأفق، جنوب القوس $\widehat{BI}$ (الشكل ٨٠).



الشكل ٧٩

إذا كانت الزاوية $\widehat{PBI}$ منفرجة، يكون عندئذ $\widehat{PBI} > \widehat{HBI}$ ؛ والقوس $\widehat{BQB'}$ التي تقطع دائرة نصف النهار فوق الأفق تكون عندئذ شمال الدائرة BI.



الشكل ٨٠

ليكن t الزمن الذي يستغرقه القمر لينتقل من B إلى N ، ولتكن X القوس الخاصّة بحركة العقدة[١٩] خلال الزمن t. والقوس X صغيرة جداً، وهي قوس من الدائرة BQ. لتكن B' النقطة الثانية المشتركة بين الدائرتين BQ وَ BI.

* إذا كان $X = \widehat{BB'}$، تكون O عندئذ في B' وتكون $\widehat{ON}$ القوسَ التي يجتازها القمر على الفلك المائل خلال المدة t ($\widehat{BB_1} = \widehat{ON}$).

* إذا كان $X > \widehat{BB'}$، فإنّ النقطة B لا تبلغ النقطة B' في نهاية الزمن t، فلا تكون عندئذ قد رجعت إلى الدائرة BI.

* إذا كان $X < \widehat{BB'}$ ، فإنَّ النقطة B ترسم القوس $\widehat{BB'}$ من الدائرة BQ، وتبلغ النقطة B' على الدائرة BI، ثم تتجاوز النقطة B'.

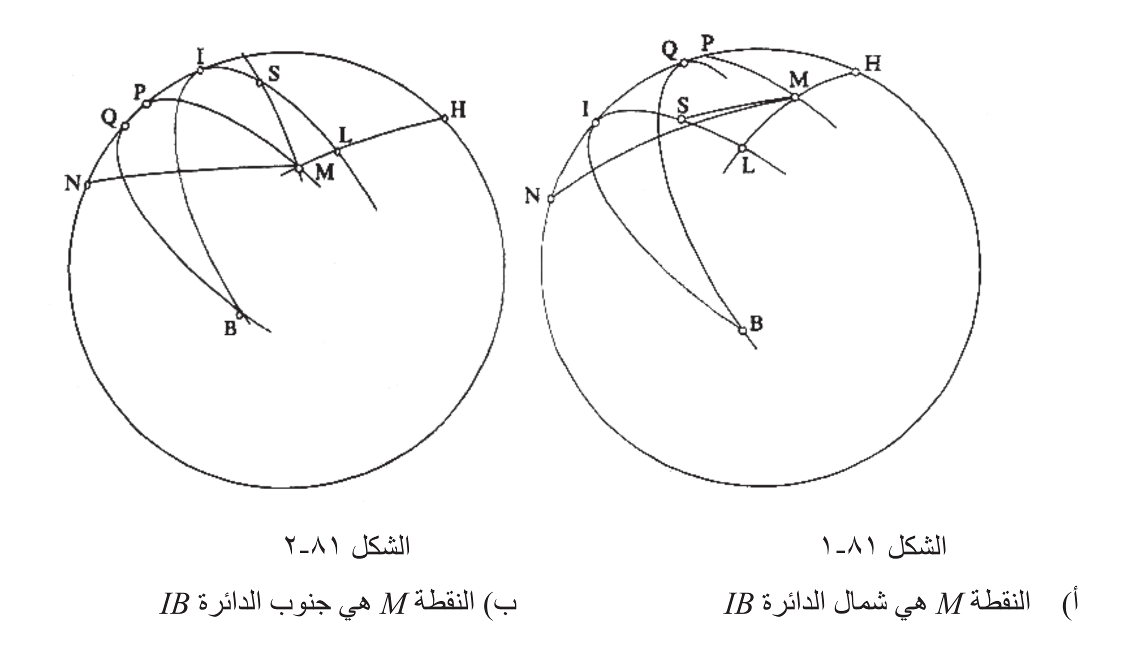
ويكون موضع B، في هاتين الحالتين الأخيرتين، مختلفاً عند نهاية الزمن t عن النقطة O. لتكن النقطة M موضع النقطة B على الدائرة BQ عند نهاية الزمن t، أي في اللحظة التي يمرّ فيها القمر على دائرة نصف النهار في النقطة N. فيُمكن إذاً أن تكون النقطة M في O على الدائرة BI في الحالة الأولى ($B' = M = O$)، كما يُمكن أن تكون شمال الدائرة BI أو جنوبها في الحالتين الأخريين.

[١٩] نحن نعرف أنَّ حركة العقدة تقبل قوساً مقدارها ٣' في اليوم بالاتجاه المخالف لتوالي البروج (انظر: "في ذكر الأفلاك" ضمن: Régis Morelon [Paris, 1987] *Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*، ص.21).

إذا كان t الزمن الذي ينتقل خلاله القمر من B إلى N، فإن t تكون ممثّلة بالقوس $\widehat{BS}$ من الدائرة BI. فالنقطة B، على الدائرة BQ، تبلغ النقطة S على الدائرة BI، والنقطة B التي على الفلك تبلغ النقطة M (الشكل ٨١-١ والشكل ٨١-٢).

القوس $\widehat{SM}$ هي القوس التي تقطعها النقطة B من الفلك خلال الزمن t وفقاً لحركة العقدة.

والقوس $\widehat{MN}$ هي، من جهة أخرى، القوس التي يقطعها القمر على فلكه خلال الزمن t.



الشكل ٨١-١

أ) النقطة M هي شمال الدائرة IB

الشكل ٨١-٢

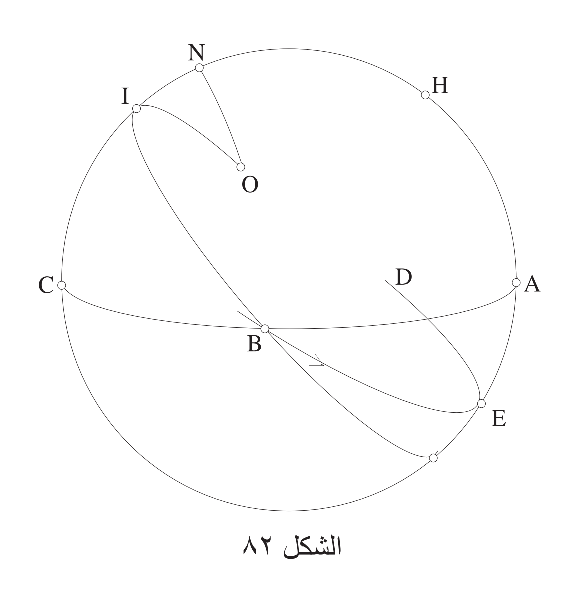
ب) النقطة M هي جنوب الدائرة IB

نُخرِج من النقطة H، قطبِ دائرة معدّل النهار، الدائرةَ العظمى MH التي تقطع الدائرة IB الموازية لدائرة معدّل النهار على النقطة L. ونخرج من النقطة M الدائرةَ الموازية لدائرة معدّل النهار التي تقطع دائرة نصف النهار على النقطة P [٢٠]. وتكون $\widehat{NP}$، في الحالتين، ميلَ القوس $\widehat{MN}$. ويكون معنا $\widehat{LM} = \widehat{PI}$، وهذه القيمة مساوية لميل القوس $\widehat{MS}$.

نفترض أنَّ القمر ينتقل من B نحو E وأنَّ حركته هي من الجنوب نحو الشمال؛ فتكون القوس $\widehat{BED}$ من فلكه شمال الدائرة BI (الشكل ٨٢). والقوس $\widehat{BED}$ هي، وفقاً للفرضيات، تحت الأفق. ترسم النقطة B الدائرةَ BI خلال الحركة اليومية. والقمر الذي ينتقل على فلكه يترك الدائرة BI ويتّجه نحو شمال هذه الدائرة. يبلغ القمر دائرة نصف النهار في النقطة N شمال I؛ وتصل النقطة B عندئذ إلى النقطة O. وقوس الفلك المائل الذي يرسمه القمر يصبح

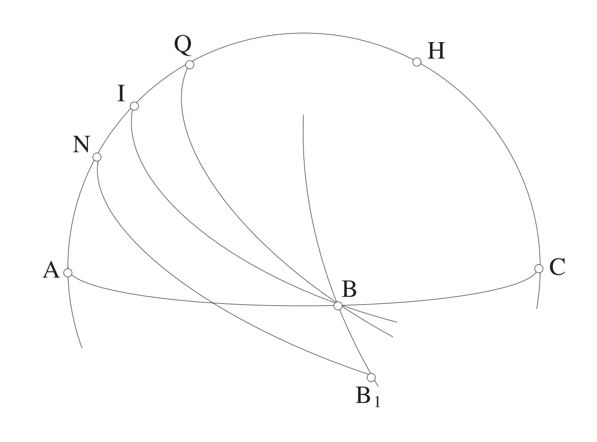
[٢٠] الحرف P لا يرمز إلى نفس النقطة التي رمز إليها سابقاً، ولا يرمز إلى قطب فلك البروج.

في الموضع $\widehat{NO}$ إذا لم نأخذ بعين الاعتبار حركة العقدة. ويمكن أن نتابع الدراسة بعد ذلك، كما فعلنا في الحالة الأولى، آخذين بعين الاعتبار حركة العقدة.



الشكل ٨٢

والخلاصة هي أنَّه إذا كانت حركة القمر على فلكه من الشمال نحو الجنوب، فإنَّ النقطة N تكون عندئذ في جنوب الدائرة BI وتكون M في شمال أو في جنوب الدائرة BI. وإذا كانت حركة القمر على فلكه من الجنوب نحو الشمال، فإنَّ النقطة N تكون عندئذ شمال الدائرة BI وتكون M شمال هذه الدائرة أو جنوبها. يُمكننا إذاً أنْ نعطي التعاريف التالية:



الشكل ٨٣

I: نقطة مرور B على دائرة نصف النهار

N: نقطة مرور القمر على دائرة نصف النهار

Q: نقطة تقاطع الدائرة BQ (حركة العقدة) مع دائرة نصف النهار

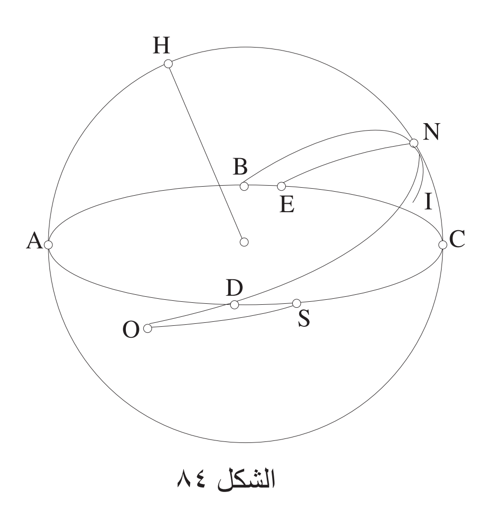
$\widehat{BI}$: الزمن المحصَّل: الزمن الذي تستغرقه النقطة B (أو القمر على معدّل النهار السماوي) المتحرِّكة بالحركة اليومية، لكي تبلغ دائرة نصف النهار

$\widehat{NI}$: ميل حركة القمر

$\widehat{QI}$: ميل حركة العقدة

دراسة حركة القمر بين مروره على دائرة نصف النهار وغروبه

يكون معنا : الأفق هو $ABCD$ ، A في الشمال، B في الشرق، C في الجنوب، D في الغرب (الشكل ٨٤).



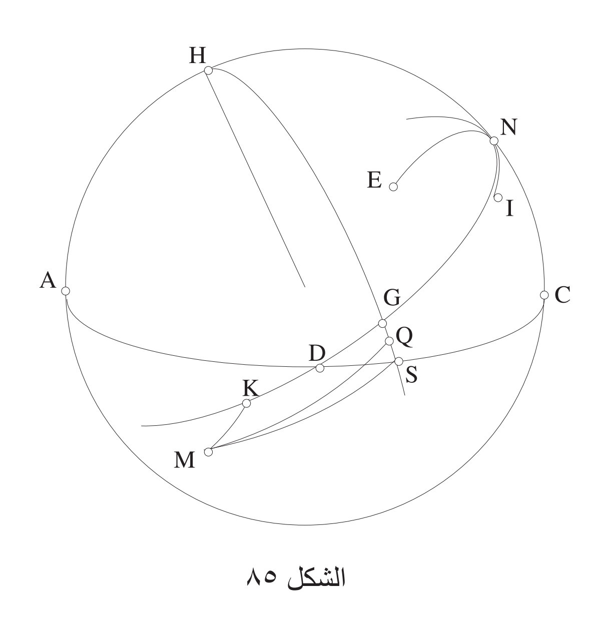
الشكل ٨٤

القمر هو في النقطة N على دائرة نصف النهار؛ لتكن DNB الدائرة المارة بـِ N الموازية لدائرة معدّل النهار، ولتكن $\widehat{NE}$ قوساً من الفلك ولتكن $\widehat{IN}$ القوس التي ترسمها N وفقاً لحركة العقدة.

وتكون N قد تجاوزت النقطة D عندما يبلغ القمرُ الأفقَ في النقطة S، فتُصبحُ القوس $\widehat{NE}$ التي يرسمها القمر على فلكه في الموضِع $\widehat{OS}$.

(رُسِمَ الشكل في الحالة التي تكون فيها القوس $\widehat{NE}$ جنوبَ الدائرة DNB، حيث ينتقل القمر من N إلى E، فتكون عندئذ القوس $\widehat{OS}$ جنوب الدائرة DNB).

إذا أخذنا بعين الاعتبار حركة العقدة، يكون موضعُ النقطة N، عندما يبلغ القمرُ الأفقَ، غيرَ مُطابِق، بشكل عام، للنقطة O. وليكن هذا الموضع في النقطة M [٢١].



الشكل ٨٥

إذا أخذنا بعين الاعتبار الحركاتِ الثلاثَ، وإذا كانت القوسُ $\widehat{KN}$ الزمنَ المحصَّلَ الذي يستغرقه القمر في انتقاله من N إلى نقطة الأفق S، تكون قوسُ حركة العقدة $\widehat{IN}$ قد وصلت إلى الموضع $\widehat{MK}$ وتكون القوس $\widehat{EN}$ قد وصلت إلى الموضع $\widehat{MS}$ (الشكل ٨٥).

نُخرِج الدائرة العظمى SH التي تقطع الدائرة DN على النقطة G، ونخرج من النقطة M دائرة زمانية تقطع القوس $\widehat{SH}$ على النقطة Q: القوس $\widehat{DN}$ هو الزمن المحصَّل. $\widehat{SG}$ هو ميل القوس $\widehat{SN}$ الذي يرسمه القمر (أو ميل حركة القمر). $\widehat{QG}$ هو ميل القوس $\widehat{MK}$ (أو ميل حركة العقدة).

حركة الشمس

القضية ١٧- يبدأ ابن الهيثم هنا، كما فعل بصدد حركة القمر، بتعريف المصطلحات وعرض المبادئ وتحديد مختلف الحركات التي تتركَّب منها حركة الشمس. يتعلَّق الأمر هذه

[٢١] إن النص يحتفظ، في هذه الحالة، بالحرف S.

المرة بحركتين: الحركة اليومية وحركة الشمس الخاصة على فلك البروج. إنَّ الهيئة المُقترَحة لحركة الشمس هي إذاً أكثر بساطة من تلك التي أعدَّت لحركة القمر.

تتحرَّك الشمس على فلك البروج باتجاه توالي البروج، الذي هو الاتجاه المباشر، حول محور فلك البروج الموجَّه نحو الشمال.

تقطع دائرةُ البروج دائرةَ معدّل النهار على نقطتي الاعتدال γ وَ γ' . يعتبر ابن الهيثم أنَّ النقطتين γ وَ γ' ثابتتان(انظر الملاحظة).

تنقسم دائرة البروج إلى أربع أقواس متساوية بالقطر $\gamma\gamma'$ وبالقطر $\sigma\sigma'$ الذي يصل بين نقطتيْ الانقلابيْن:

النقطة σ شمال دائرة معدّل النهار، هي نقطة الانقلاب الصيفي، وهي نقطة فلك البروج التي لها الميل الشمالي الأقصى.

النقطة σ' جنوب دائرة معدّل النهار، هي نقطة الانقلاب الشتوي، وهي نقطة فلك البروج التي لها الميل الجنوبي الأقصى (توجَد σ وَ σ' في المستوي الذي يحتوي على قطبيْ دائرة معدّل النهار وقطبيْ دائرة البروج).

ملاحظة: يُمكن أن نعتبر مستوي فلك البروج ثابتاً بالنسبة إلى النجوم، ولكن الأمر مُختلف بالنسبة إلى مستوي دائرة معدّل النهار، وذلك بسبب ظاهرة الحركة البطيئة لخط العقدتين[٢٢].

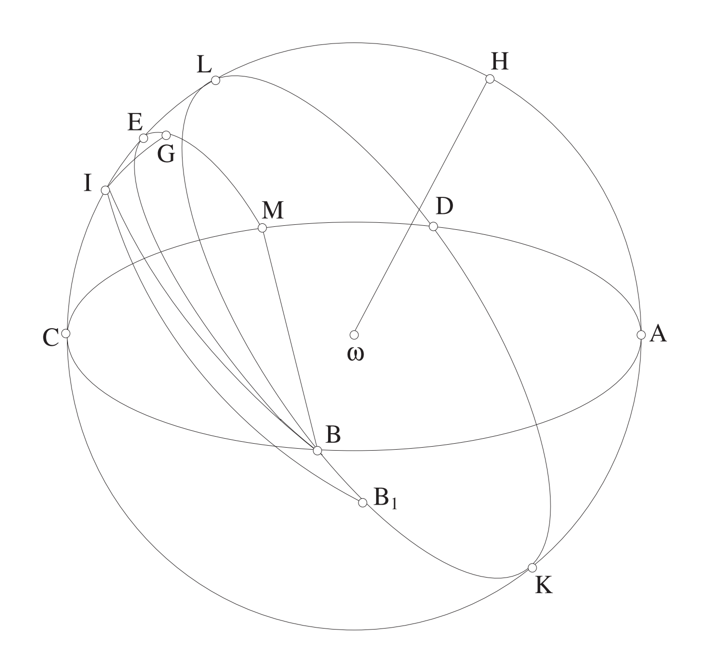
تنتقل النقطة γ على فلك البروج بالاتجاه التراجعي وتُتِمُّ دورة كاملة خلال ٢٦٠٠٠ سنة، ولذلك يحدث الاعتدال في كل سنة قبل أوانِ الاعتدال في السنة السابقة.

وهكذا فإنَّ ابن الهيثم، بعد أن ذكَّر بالمصطلحات وبالمبادئ، أعدَّ هيئةً لحركة الشمس من شروقها إلى نقطة اختيارية على الأفق وحتَّى مرورها على دائرة نصف النهار. ولقد أورد بالتتابع الحالتين التاليتين:

[٢٢] تُسمَّى هذه الحركة مبادرة الاعتدالين، وفقاً للمصطلحات الحديثة (المترجم).

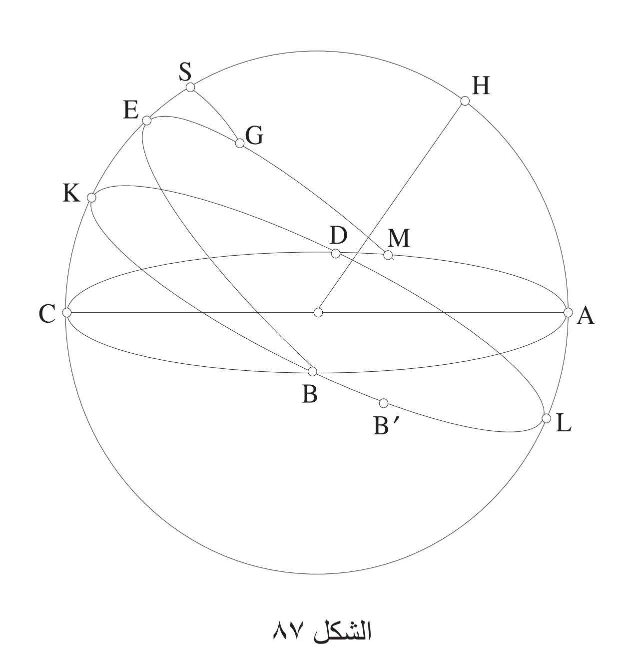
لتكن $ABCD$ دائرة الأفق، ولتكن $BKDL$ دائرة البروج . نفترض أولاً أنَّ K تحت الأفق وأنَّ L فوقه. ويكون توالي البروج وفقاً للترتيب B، K، D، L.

وقطر دائرة معدّل النهار هو AC، وقطبها الشمالي هو H. ونفترض أنَّ النقطة B هي الموضع الأوَّلي للشمس. لتكن BEM الدائرة الموازية لمعدّل النهار التي تمرّ بالنقطة B والتي تقطع دائرة نصف النهار على النقطة E. النقطة B ترسم هذه الدائرة، خلال حركتها اليومية، بالاتجاه التراجعي حول المحور ωH (ω هو مركز كرة العالم). إنَّ الشمس تنتقل على دائرة البروج من B نحو K عندما ترسم النقطة B القوس $\widehat{BE}$ ؛ فلتكن النقطة B_1 موضع الشمس على فلك البروج عندما تبلغ النقطة B النقطة E. تكون الشمس إذاً متأخِّرة عن النقطة B في حركتها اليومية؛ وعندما تمرُّ الشمس بدائرة نصف النهار على النقطة I، تكون النقطة B قد بلغت النقطة G على الدائرة BEM، حيث تكون G غرب دائرة نصف النهار. تكون القوس $\widehat{BB_1}$ من فلك البروج قد وصلت عندئذ إلى الموضع $\widehat{GI}$، وتكون I جنوب النقطة E. وتكون القوس $\widehat{BB_1}$ من فلك البروج قد وصلت إذاً إلى الوضع $\widehat{GI}$، غرب دائرة نصف النهار. فالشمس ترسم، إذاً، على الكرة السماوية القوسَ $\widehat{BI}$ المحصورةَ بين الدائرتين، BE و IB_1، الموازيتين لمعدِّل النهار. القوس $\widehat{BG}$ هي الزمن الذي تستغرقه الشمس لتنتقل من النقطة B إلى النقطة I. والقوس $\widehat{EI}$ هي ميل القوس $\widehat{GI}$ النسبة إلى دائرة BEM الموازية لمعدِّل النهار؛ والقوس $\widehat{EI}$ هي أيضاً ميل حركة الشمس في مسيرها من النقطة B إلى النقطة I. والقوس $\widehat{BE}$ تُسمَّى الزمن المحصَّل.



الشكل٨٦

نفترض أنَّ نصف الدائرة BKD فوق الأفق، وأنَّ الحركة الخاصة للشمس تحدث من B نحو L. يكون توالي البروج في هذه الحالة وفقاً للترتيب : B، L، D وَ K.



الشكل ٨٧

تبلغ النقطة B دائرة نصف النهار في النقطة E، وتكون في النقطة G عندما تبلغ الشمس دائرة نصف النهار في النقطة S. والقوس $\widehat{SG}$ التي تجتازها الشمسُ على فلك البروج تكون غرب دائرة نصف النهار وشمال الدائرة MEB الموازية لمعدِّل النهار. القوس $\widehat{EB}$ هي الزمن المحصَّل، والقوس $\widehat{ES}$ هي ميل حركة الشمس بالنسبة إلى الدائرة الزمانيَّة MEB.

حركة الكواكب

القضية ١٨- إنَّ ميل الفلك، لكلٍّ من الكواكب المريخ والمشتري وزُحل، بالنسبة إلى مستوي فلك البروج لا يتغيِّر بقدر محسوس.

أمّا ميل الفلك، لكلٍّ من كوكبيْ عطارد والزهرة، بالنسبة إلى مستوي فلك البروج، فإنَّه يتغيِّر. وذلك أنَّ مستوي هذا الفلك يتأرجح حول خط العقدتين على جهتيْ فلك البروج. ويبقى هذا الميل محصوراً بين 0 وحدٍّ أقصى مُعَيَّن[٢٣].

إنَّ ميل كل من الكواكب الخمسة، الذي هو متغيِّر لعطارد والزهرة ويُعتبَر ثابتاً للمريخ والمشتري وزُحل، يُشكِّل في جميع الحالات جُزءاً صغيراً من ميل فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

إنَّ ميلَ كلّ من هذه الأفلاك متغيِّرٌ بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، كما هي حال فلك القمر، ولا يُمكن لأيّ من هذه الأفلاك أنْ يتطابق مع مستوي معدل النهار.

كلٌ فلك من هذه الأفلاك يقطع مستوي فلك البروج وفقاً لخط العقدتين، ويدور حول محور فلك البروج بحركة بطيئة جداً.

حركة كل كوكب من الكواكب الخمسة على فلكه المائل بالنسبة إلى دائرة البروج

إذا كانت الحركة تحدث بالاتجاه المباشر، أي باتجاه توالي البروج، فإنَّ الكوكب يتحرَّك من الغرب نحو الشرق، من الشمال نحو الجنوب ومن الجنوب نحو الشمال بالنسبة إلى قطبيْ دائرة معدّل النهار، كما هي حال حركة القمر على فلكه. ولكن اختلافاً مُهماً، بين حركة كوكب ما وحركة القمر، يحدث بسبب ميل فلك تدوير كل كوكب بالنسبة إلى مستوي الفلك، إذ إنَّ مركز الكوكب يبتعد عن مستوي الفلك نحو الشمال أو نحو الجنوب.

وإذا كان الكوكب يتحرَّك باتجاه تراجعيّ، أيْ إذا كانت حركته بالنسبة إلى فلك البروج تحدث بالاتجاه المخالف لتوالي البروج، فإنه يتحرَّك من الشرق نحو الغرب. وهذا لا يُغيِّر شيئاً في دراسة الميل بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار أو بالنسبة إلى دائرة زمانية.

---

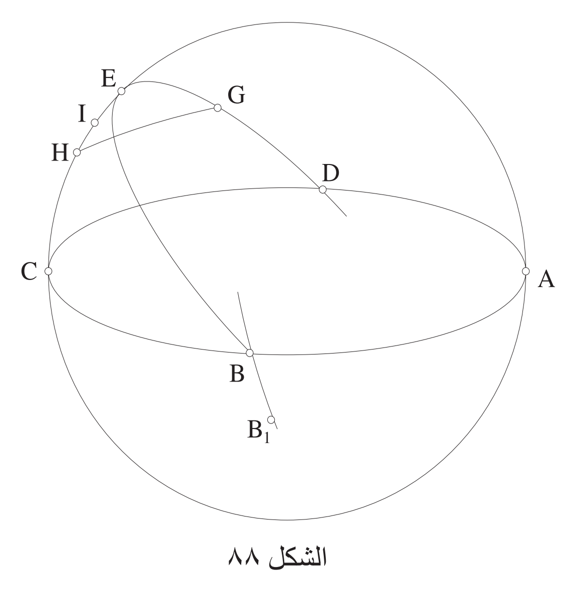
[٢٣] إنَّ الحد الأقصى لميل الفلك المائل بالنسبة إلى فلك البروج هو 7 درجات لعطارد وَ ′24°3 للزُهرة. أما بالنسبة إلى الكواكب العلوية، فإنَّ هذا الميل ثابت تقريباً، وهو يساوي للمريخ ′51°1 وَ ′19°1 للمشتري وَ ′30°2 لزحل.

التوقّف بين التراجع والتقدّم (المُراوحة)

إننا لا نرصد خلال هذا التوقُّف أيَّة حركة في الطول بالاتجاه المباشر أو بالاتجاه التراجعي، ولكن يُمكن أن نرصد تغيُّراً في العرض سببه ميل فلك التدوير.

إذا كانت ABC دائرة الأفق، وكانت النقطة B على الفلك المائل موضعَ الكوكب في لحظة معلومة، وكانت BED الدائرة الزمانية للنقطة B، فإنَّ الكوكب يتحرَّك بالحركة اليومية في جميع الحالات على فلكه نحو دائرة نصف النهار، وتكون له حركته الخاصة على فلكه.

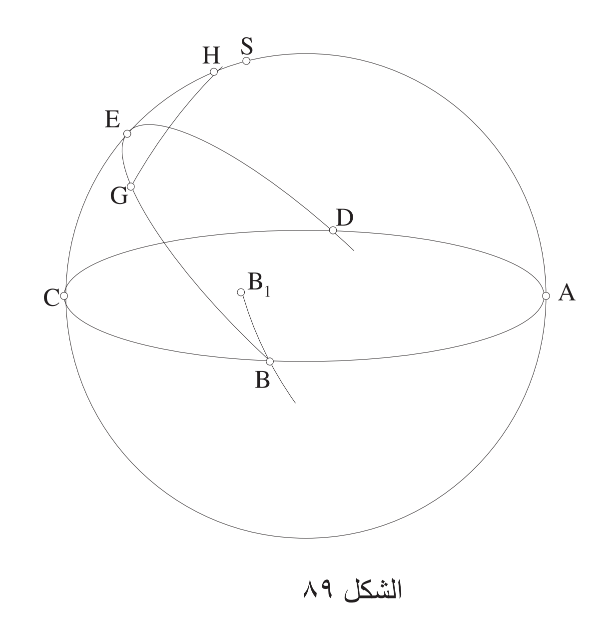
إذا تحرَّك الكوكب بالاتجاه المباشر من B إلى B_1 ، فإن النقطة B تبلغ قبل الكوكب دائرةَ نصف النهار في النقطة E. وعندما تبلغ النقطةُ B_1، التي هي على الفلك المائل، دائرةَ نصف النهار في النقطةَ H، فإنَّ النقطة B تكون قد وصلت إلى النقطة G وتكون القوس $\widehat{BB_1}$ من الفلك قد وصلت إلى الموضع $\widehat{GH}$ غرب النقطة H شمال أو جنوب الدائرة BED .



الشكل ٨٨

إنَّ موضعَ الكوكب على فلك التدوير معلومٌ بواسطة القوس $\widehat{HI}$ شمال أو جنوب القوس $\widehat{GH}$. وينتقل الكوكب من النقطة B إلى النقطة I خلال الزمن $\widehat{GB}$ ؛ الزمن المحصَّل هو $\widehat{BE}$ ، وميل الحركة هو $\widehat{IE}$.

وإذا كانت حركة الكوكب بالاتجاه التراجعي، فإنَّ الكوكب يصل إلى دائرة نصف النهار قبل وصول النقطة B إليها.



الشكل ٨٩

والقوس المرسومة على الفلك هي في الموضع $\widehat{GH}$ شرق النقطة H شمال أو جنوب الدائرة BED. وضع فلك التدوير معلوم بواسطة القوس $\widehat{SH}$ ، حيث تكون S شمال أو جنوب النقطة H.

إذا كانت النقطة B هي "نقطة المراوحة"، أي نقطة التوقُّف بين الحركة المباشرة والحركة التراجعية، فإنَّ الكوكب، خلال الزمن الذي يدوم فيه التوقُّف، لا يبتعد عندئذ عن الدائرة BED إلا بالمسافة الناتجة من ميل فلك التدوير، وهي المسافة التي يمكن أن لا تقدَّر بالحسّ. وإذا بلغ الكوكب دائرة نصف النهار، فإنَّ ذلك يكون في النقطة E.

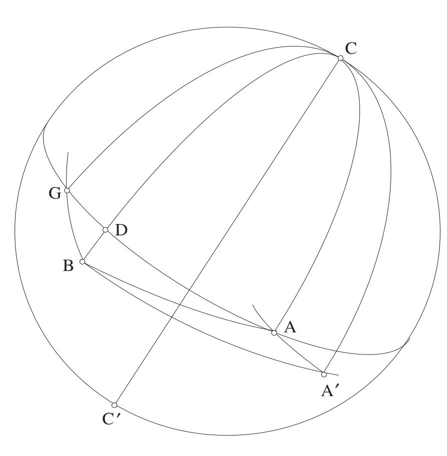
٢-٢- الزمن المُحَصَّل والميل

لتكن النقطة A الموضع الأوَّلي لكوكب في اللحظة المعلومة t_0، ولتكن B الموضِع الذي يكون فيه الكوكب بعد زمن معلوم t ، أي في اللحظة $t_0 + t = t_1$. ولتكن AC وَBC دائرتين عُظْمَيَيْن مارّتين بالنقطة C التي هي قطب دائرة معدّل النهار، ولتكن DA الدائرة الزمانية المارة بالنقطة A، حيث تكون D على الدائرة BC.

دراسة حالة الشمس أو حالة أحد الكواكب المتحيِّرة السبعة

القضية ١٩- إنَّ للشمس حركتها الخاصة على فلك البروج، كما أنَّ فلك البروج يدور حول محور القطبين CC'.

لتكن A موضع الشمس على دائرة البروج في لحظة معلومة t_0. تخضع النقطة A للحركة اليومية وترسم خلال الزمن المعلوم t قوسَ $\widehat{GA}$ من الدائرة الزمانية ؛ وهذا الزمن يُقاس بالقوس $\widehat{GA}$. تنتقل الشمس التي كانت في النقطة A على فلك البروج وترسم خلال الزمن t القوسَ $\widehat{AA'}$، ولكن فلك البروج يدور حول CC'، فتصل القوس $\widehat{AA'}$ في نهاية الزمن t إلى الموضع $\widehat{BG}$.



الشكل ٩٠

توجَد النقطة B على الدائرة الموازية لمعدِّل النهار المارة بالنقطة A'، وتكون الزاويتان اللتان تُشكِّلهما الدائرة DA الموازية لمعدِّل النهار مع القوسين $\widehat{BG}$ وَ $\widehat{AA'}$ متساويتين.

إنَّ مواضع A وَ G وَ B معلومة، فالأقواس $\widehat{AC}$ وَ $\widehat{GC}$ وَ $\widehat{BC}$ هي إذاً معلومة وَيكون: $\widehat{GC} = \widehat{AC}$، فتكون القوس $\widehat{BD} = \widehat{CA} - \widehat{CB}$ ، إذاً، معلومة.

والنقطة G هي الموضع الذي تبلغه النقطة A في نهاية الزمن t، والنقطة D توافق النقطة B، أيْ الموضع الذي تبلغه الشمس. القوس $\widehat{DG}$ تكون إذاً معلومة وتُمَثِّل تَقَدُّم النقطة A على الشمس في حركتها اليومية.

والشمس ترسم على الكرة السماوية القوس $\widehat{BA}$ الموجودة بين النقطة B والدائرة الزمانية DA (أي بين الدائرتين DA وَ BA' الموازيتين لمعدِّل النهار). والحركة على القوس $\widehat{AB}$ تتركَّب من حركة الشمس الخاصّة على فلك البروج ومن الحركة اليومية.

والطالع المستقيم لهذه القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو $\overset{\frown}{AD}$ [٢٤]، وميلها هو $\overset{\frown}{BD}$؛ وهاتان القوسان معلومتان. والنقطتان G وَ B هما بالفعل معلومتان على فلك البروج، كما أنَّ القوسين $\overset{\frown}{GD}$ وَ $\overset{\frown}{BD}$ معلومتان (وفقاً للقضايا ٥ وَ ٦ وَ ٧)؛ وكذلك إنَّ $\overset{\frown}{AG}$ معلومة، فنستنتج من ذلك $\overset{\frown}{AD}$.

دراسة حالة القمر أو أحد الكواكب الخمسة

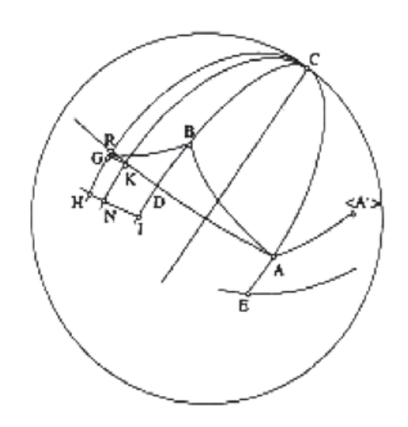
القضية ٢٠- لتكن A الموضع الأولي للقمر؛ الدائرة العظمى AC تقطع فلك البروج على النقطة E ؛ ولتكن B موضع القمر في نهاية الزمن t ؛ الدائرة العظمى BC تقطع دائرة A الزمانية على النقطة D وتقطع فلك البروج على النقطة I. الأقواس $\overset{\frown}{CA}$ ، $\overset{\frown}{AE}$ ، $\overset{\frown}{BC}$ وَ $\overset{\frown}{BI}$ معلومة؛ ويكون معنا $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CD}$، فتكون القوسان $\overset{\frown}{BD}$ وَ $\overset{\frown}{DI}$ معلومتين.

يرسم القمرُ، خلال الفترة t، القوسَ $\overset{\frown}{A'A}$ على فلكه، وهذه القوس تنتقل إلى الموضع $\overset{\frown}{BG}$. والنقطة G تكون غرب النقطة B؛ وتكون بشكل عام شمالَ أو جنوبَ الدائرة DA ، بسبب حركة العقدة.

تنتقل الدائرة CAE إلى الموضع $CRGH$، حيث تكون R على الدائرة DA ، ويكون معنا: $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CR}$ وَ $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{GH}$. والنقطتان H وَ I معلومتان على فلك البروج.

لتكن $\overset{\frown}{AK}$ القوس التي يقاس بها الزمن المعلوم t؛ الدائرة العظمى CK تقطع فلك البروج على النقطة N، ويكون $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CK}$.

[٢٤] أي، إذا كانت δ ترمز إلى الفرق بين الطالعين المستقيمين لنقطتين، يكون معنا هنا: $\delta(A, D) = \delta(A, B)$ = قياس $\overset{\frown}{AD}$.



الشكل ٩١: إنَّ C، قطبَ دائرة معدّل النهار، والدائرةَ الموازية لمعدّل النهار المارة بالنقطة A، والموضعَ الأوَّلي للكوكب المدروس هي عناصر ثابتة.

دائرة البروج وفلك الكوكب يخضعان للحركة اليومية؛ الكوكب له حركة خاصة على فلكه، وبالإضافة إلى ذلك، فإنَّ لفلك الكوكب حركة بالنسبة إلى فلك البروج.

لو لم تكن حركة العقدة موجودةً، لوصلت النقطة A إلى النقطة K في نهاية الزمن t؛ ولكنها تصل إلى النقطة G، بسبب حركة العقدة على فلك البروج، فيكون إذاً للنقطتين K وَ G نفس العرض بالنسبة إلى فلك البروج، وتكون القوس $\widehat{GK}$ موازية لفلك البروج ($\widehat{KG} = \widehat{NH}$) وموافقة لانتقال العقدة؛ والنقطة N معلومة، فتكون $\widehat{NI}$ إذاً معلومة. والقوس $\widehat{DK}$ هي الطالع المستقيم للقوس $\widehat{IN}$، فتكون $\widehat{DK}$ إذاً معلومة. ولكن $\widehat{AK}$ معلومة، فإذاً $\widehat{AD}$، التي هي الزمن المُحصَّل، معلومة. وكنا قد رأينا أنَّ القوس $\widehat{BD}$، ميل الحركة من A إلى B، معلومة.

دراسة حالات الكواكب

القضية ٢١-

أ) الكوكبان السُّفلِيَّان:

إنَّ ميل الفلك، لكلٍّ من هذين الكوكبين، يتغيَّر(انظر ص. ٢٠٥)، وهذا ما يؤثِّر في موضع النقطة G الذي يكون في أغلب الأحيان شمالَ أو جنوبَ الدائرة الزمانية AD.

وتكون القوسُ $\widehat{A'A}$، التي يرسمها الكوكب على فلكه انطلاقاً من النقطة A خلال الزمن المعلوم t، معلومةً؛ وفي نهاية الزمن t تبلغ هذه القوس الموضع $\widehat{GB}$. وإذا كانت حركة

الكوكب على فلكه بالاتجاه المباشر، تكون A' شرقَ A، فتكون G غرب B؛ وإذا كانت الحركة بالاتجاه التراجعي، تكون G شرقَ B.

الزمن المحصَّل وميل الحركة يُعرَّفان، مثلما حصل في حالة القمر، استناداً إلى الموضع الأوَّلي A والموضع النهائي B. الزمن المحصَّل هو القوس $\widehat{DA}$ والميل هو القوس $\widehat{BD}$.

ولكن موضع الكوكب، في حالة عطارد والزهرة، يُعرَّف بطوله وعرضه بالنسبة إلى فلك البروج. وهكذا يتعلَّق هذا الموضع بميل فلك الكوكب بالنسبة إلى فلك البروج وبميل فلك التدوير بالنسبة إلى فلك الكوكب. وعندما تكون إحداثيات الكوكب بالنسبة إلى فلك البروج معلومة، فإنَّ إحداثياته بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار تكون معلومة.

ب) الكواكب العلوية

حركة العقدتين بطيئة جداً وليس لها تأثير خلال يوم واحد.

والنقطة G هي على الدائرة DA.

- غرب النقطة B، إذا كانت حركة الكوكب بالاتجاه المباشر
- شرق النقطة B، إذا كانت حركة الكوكب بالاتجاه التراجعي.

يؤثِّر ميلُ فلك التدوير، بالنسبة إلى مستوي فلك الكوكب، في حركات هذه الكواكب الثلاثة؛ ولكن عرضَ كلٍّ من هذه الكواكب بالنسبة إلى فلك البروج معلومٌ في كل زمن معلوم؛ فتكون الأقواس، مثل $\widehat{CA}$ وَ $\widehat{CB}$، إذاً معلومة.

ويكون لدينا ما يلي فيما يخصّ الكواكب الخمسة:

إذا كانت حركة الكوكب على فلكه بالاتجاه المباشر، تكون G عندئذ غربَ B، فيكون الزمن المُحصَّل أصغر من الزمن المعلوم، أي أصغر من مدَّة الحركة (وهذا ما يحصل في حالة القمر).

إذا كانت حركة الكوكب على فلكه بالاتجاه التراجعي، تكون G عندئذ شرقَ B، فيكون الزمن المُحصَّل أكبر من الزمن المعلوم.

وإذا كان الكوكب متوقِّفاً، أي في "نقطة مراوحة"، فإنَّ موضعه لا يتغيَّر بالنسبة إلى فلك البروج خلال الزمن المعلوم، وتكون G في النقطة D، فيساوي الزمن المُحصَلُ الزمنَ المعلوم.

ميل الفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار[٢٥]

القضية ٢٢ـ

الشمس: إنَّ الزاوية بين مستوي فلك البروج ومستوي دائرة معدّل النهار ثابتة، وتساوي $\alpha = 23°27'$.

الزاوية α هي الميل الأقصى لنقاط فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، ويتم بلوغها في الانقلابين:

- الانقلاب الصيفي شمالاً (بداية برج السرطان)
- الانقلاب الشتوي جنوباً (بداية برج الجدي).

القمر: الزاوية β بين فلك القمر وفلك البروج تتغيَّر قليلاً جداً، ولقد اعتبرها ابن الهيثم ثابتة؛ وهي تساوي الميل الأقصى بالنسبة إلى فلك البروج، أيْ أنـَّها تساوي ميل الطرفين الشمالي والجنوبي بالنسبة إلى فلك البروج. ولكنَّ هذين الطرفين يتحركان بالنسبة إلى دائرة البروج؛ فيتحرَّك موضعاهما المنسوبان إلى فلك البروج، على دائرة البروج. وهذا الانتقال راجع إلى حركة دوران فلك القمر حول محور فلك البروج.

يستعيد ابن الهيثم هنا الشروح التي قدَّمها بخصوص القمر في بداية مؤلَّفه (انظر ص. ٣٤٨)، وهي الشروح الخاصة بانتقال القطب الشمالي للفلك بالنسبة إلى لقطبين الشماليين لدائرة معدّل النهار ودائرة البروج.

إنَّ ميل فلك القمر بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار يتعلَّق بالمواضع النسبية لهذه الأقطاب الثلاثة، وبموضع كل من العقدتين على فلك البروج.

بداية برج الحمل = γ (الاعتدال الربيعي)

---

[٢٥] القضية ٢٢ المشار إليها ص ٤٠٣.

بداية برج السرطان $=\sigma$ (الانقلاب الصيفي)

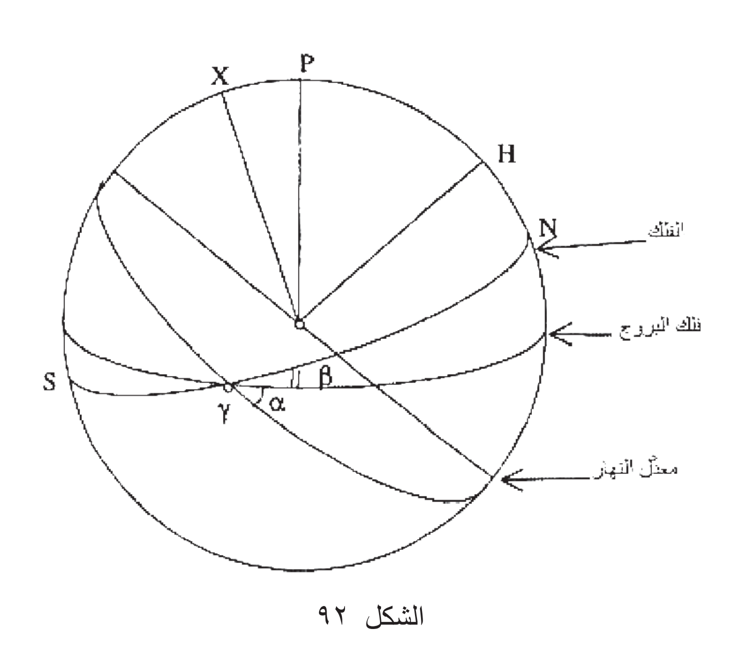
بداية برج الميزان $= \gamma'$ (الاعتدال الخريفي).

وإذا بلغ رأس الجوزهر إحدى النقطتين γ أو 'γ ، تكون الأقطاب الثلاثة H لدائرة معدّل النهار وَ P لفلك البروج وَ X للفلك، على نفس الدائرة العظمى التي تقطع الفلك على النقطتين N وَ S اللتين هما الطرفان الشمالي والجنوبي الخاصّان بدائرتي معدِّل النهار والبروج.

لتكن α ميل فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، ولتكن β ميل الفلك بالنسبة إلى فلك البروج، ولتكن δ ميل الفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار. يكون لدينا حالتان:

- رأس الجوزهر في النقطة γ (بداية برج الحمل).

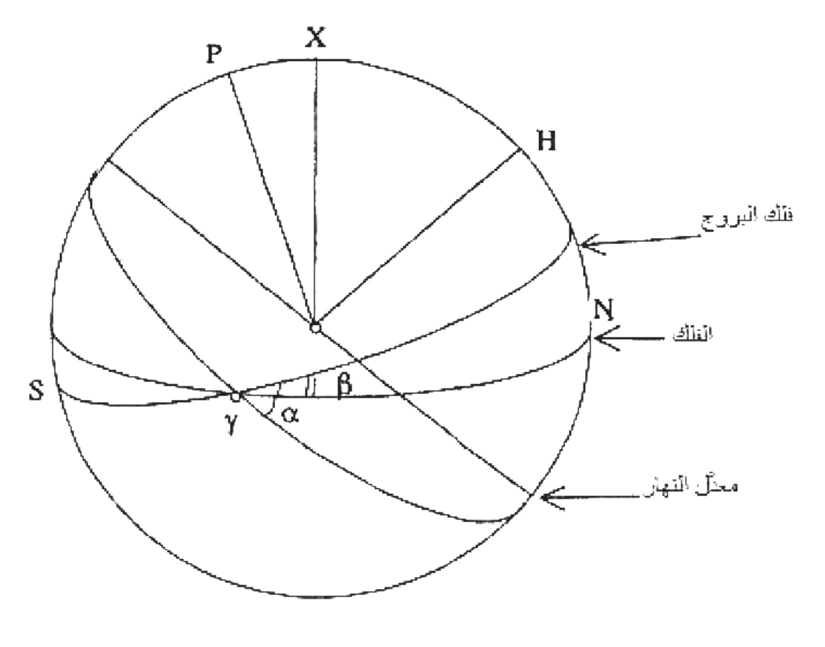
يكون معنا في هذه الحالة: $\alpha + \beta = \delta$.



الشكل ٩٢

- ذنب الجوزهر في النقطة γ (فيكون رأس الجوزهر في النقطة γ' بداية برج الميزان)

يكون معنا في هذه الحالة $\alpha - \beta = \delta$.



الشكل ٩٣

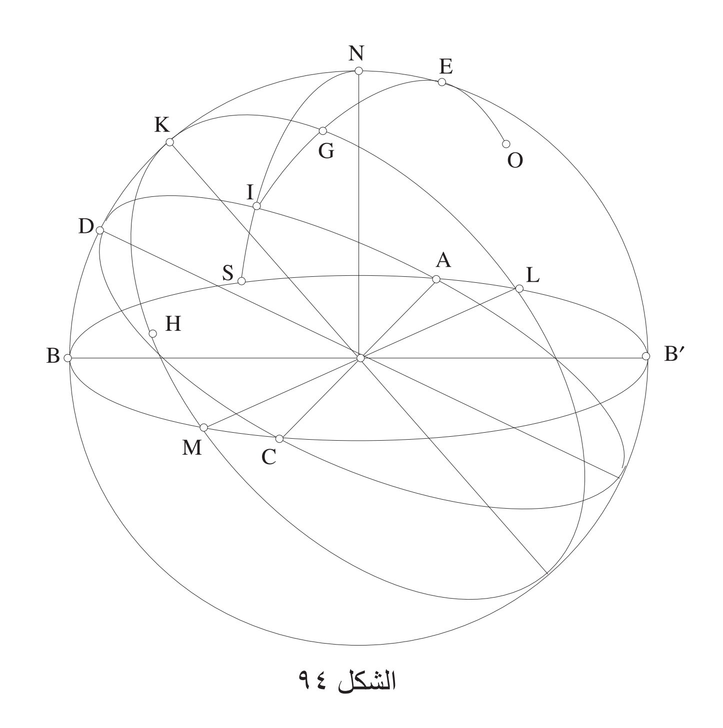
وهكذا يكون مَوْضِعَا الطرفيْن، الشمالي N والجنوبي S للفلك المائل، بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، معلومين في هاتين الحالتين.

دراسة الحالة التي لا يكون فيها رأس الجوزهر مطابقاً للنقطة γ أو للنقطة γ'

لتكن ABC دائرة فلك البروج ذات القطب N، وليكن ADC الفلكَ المائل ذا القطب E، وليكن B وَ D منتصفيْ نصفيْ الدائرة ذات القطر AC. تكون النقاط N، E، B وَ D على نفس الدائرة العظمى التي تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة K. وتقطع دائرة معدّل النهار فلكَ البروج على نقطتيْ الاعتدال M وَ L. والنقطتان A وَ C هما العقدتان.

<أ> لنفترض أنَّ M موجودة على القوس BC. تقطع الدائرة LKM، التي هي دائرة معدّل النهار، الفلكَ المائل على النقطة H. وليكن O قطب دائرة معدّل النهار؛ الدائرة OE تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة G، وتقطع قوس الفلكَ المائل $\widehat{DA}$ على النقطة I. يكون معنا : $\widehat{EO} = \widehat{GI}$ وتكون $\widehat{GI}$ الميل الأقصى للفلك المائل بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

وتكون I الطرف الجنوبي للفلك إذا كانت O القطب الشمالي. وتكون I الطرف الشمالي للفلك إذا كانت O القطب الجنوبي.



الشكل ٩٤

نفترض على الشكل أنَّ النقاط N، E، وَ O هي الأقطاب الشمالية لفلك البروج ولفلك الكوكب ولدائرة معدّل النهار. النقطتان C وَ A هما على التوالي ذنب الجوزهر ورأس الجوزهر؛ النقطتان L وَ M هما على التوالي نقطتا الاعتدال الربيعي والاعتدال الخريفي، والنقطة I هي الطرف الجنوبي للفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

النقاط A، C، B، D، L، وَ M هي نقاط معلومة، وكذلك هي حال النقاط E، N، وَ O.

قوس فلك البروج $\widehat{MB}$ معلومة، فتكون القوس $\widehat{MK}$ الموافقة لها على دائرة معدّل النهار معلومة، وبالتالي تكون القوس $\widehat{KB}$ ، من الدائرة العمودية على مستوي فلك البروج، هي أيضاً معلومة. والقوس $\widehat{BD}$ ، من جهة أخرى، معلومة، فتكون القوس $\widehat{DK}$ معلومة أيضاً.

إنَّ مبرهنة مانالاوس تعطي:

$$\frac{\sin \widehat{KD}}{\sin \widehat{DB}} = \frac{\sin \widehat{KH}}{\sin \widehat{HM}} \cdot \frac{\sin \widehat{CM}}{\sin \widehat{CB}}؛$$

$\widehat{KD}$، $\widehat{BD}$، $\widehat{CM}$ وَ $\widehat{CB}$ أقواس معلومة، فإذاً $\dfrac{\sin \widehat{KH}}{\sin \widehat{HM}}$ معلومة ؛ ولكن $\widehat{KM} = \widehat{HM} + \widehat{KH}$ معلومة، فيستنتج ابن الهيثم من ذلك أنَّ $\widehat{HM}$ معلومة.

تعليل ذلك. إنَّ لدينا $\widehat{KH} = \widehat{HM} - \widehat{KM}$، فتكون إذاً النسبة $a = \frac{\sin(\widehat{KM} - \widehat{HM})}{\sin \widehat{HM}}$ معلومة،

$$a = \frac{\sin \widehat{KM} . \cos \widehat{HM} - \cos \widehat{KM} . \sin \widehat{HM}}{\sin \widehat{HM}}$$ ،

$$a = \sin \widehat{KM} . \cot g \widehat{HM} - \cos \widehat{KM}$$ ؛

فتكون إذاً $\cotg \widehat{HM}$ معلومة لأنَّ $\widehat{KM}$ معلومة، فتكون إذاً $\widehat{HM}$ معلومة.

إنَّ مبرهنة منالاوس، المطبَّقة على أقواس الدوائر العظمى: القوسين $\widehat{GE}$ وَ $\widehat{GKH}$ اللتين تتقاطعان على النقطة G والقوسين $\widehat{EK}$ وَ $\widehat{IH}$ اللتين تتقاطعان على النقطة D، تعطي:

$$\frac{\sin \widehat{EI}}{\sin \widehat{IG}} = \frac{\sin \widehat{ED}}{\sin \widehat{DK}} . \frac{\sin \widehat{KH}}{\sin \widehat{HG}}$$ ؛

والنسبتان في الطرف الأيسر من هذه المعادلة معلومتان، فتكون النسبة في الطرف الأيمن معلومة أيضاً. ولكنَّ $\widehat{EI}$ ربعُ دائرة، فتكون $\widehat{IG}$ معلومة وتكون $\widehat{IG}$ ميل الطرف I بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار.

نرسم دائرة عظمى تمرُّ بالنقطتين N وَ I وتقطع دائرة فلك البروج على النقطة S. يكون معنا:

$$\frac{\sin \widehat{KB}}{\sin \widehat{BD}} = \frac{\sin \widehat{KM}}{\sin \widehat{MH}} . \frac{\sin \widehat{HC}}{\sin \widehat{CD}}$$.

والنسبتان الأولَيَان في هذه المعادلة معلومتان، وَ $\widehat{CD}$ هي ربع دائرة فتكون $\widehat{HC}$ معلومة.

كلٌّ من القوسين، $\widehat{HI}$ على الفلك المائل، وَ $\widehat{HG}$ على دائرة معدّل النهار، تساوي ربع دائرة لأنَّ النقطتين G وَ I موجودتان في مستوي الدائرة العظمى المارة بالقطبين E وَ O.

ولكن $\widehat{CD}$ ربعُ دائرة، فيكون إذاً $\widehat{DI} = \widehat{CH}$ ، فنستنتج أن $\widehat{DI}$ أصغر من ربع دائرة وتكون I بين A وَ D. والدائرة العظمى المارة بالنقطتين N وَ I تقطع القوس $\widehat{AB}$ على النقطة S بين A وَ B. يكون معنا:

$$\frac{\sin \widehat{CS}}{\sin \widehat{SB}} = \frac{\sin \widehat{CI}}{\sin \widehat{ID}} . \frac{\sin \widehat{DN}}{\sin \widehat{NB}}$$.

إنَّ $\overset{\frown}{CH} = \overset{\frown}{ID}$ معلومة، فإذاً $\overset{\frown}{CI}$ معلومة، والقوسان $\overset{\frown}{DN}$ وَ $\overset{\frown}{NB}$ معلومتان أيضاً، فتكون النسبة $\frac{\sin \overset{\frown}{CS}}{\sin \overset{\frown}{SB}}$ معلومة، وبما أنَّ $\overset{\frown}{CB}$ ربع دائرة يكون $\overset{\frown}{CS} = \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BS}$.

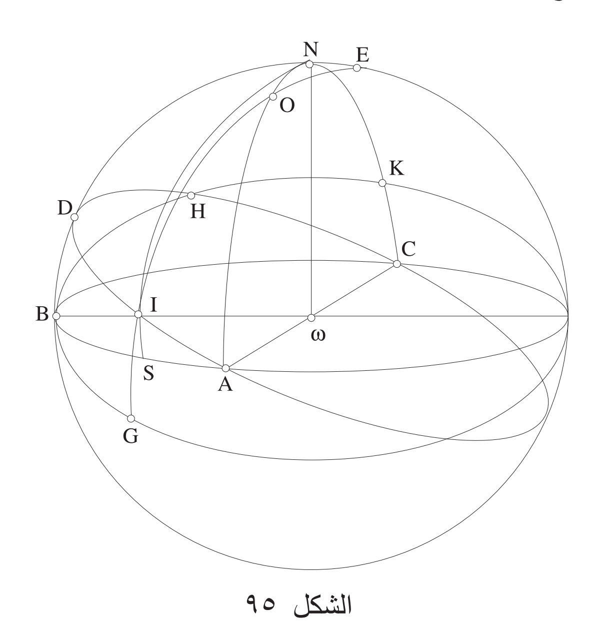
يستنتج ابن الهيثم مما سبق أنَّ القوس $\overset{\frown}{BS}$ معلومة. وذلك أنَّ $\frac{\sin \overset{\frown}{CS}}{\sin \overset{\frown}{SB}} = \text{cotg } \overset{\frown}{BS}$ معلومة، فتكون $\overset{\frown}{BS}$ إذاً معلومة وتكون عندئذ نقطة فلك البروج S معلومةً؛ والنقطة S هي موضع النقطة I بالنسبة إلى فلك البروج.

<ب> البرهان هو نفسه، إذا كانت نقطة الاعتدال M على القوس $\overset{\frown}{AB}$.

<ج> لنفترض أنَّ نقطة الاعتدال في النقطة B.

تقطع دائرة معدّل النهار الفلك المائل على النقطة H. لتكن النقطة O قطب دائرة معدّل النهار؛ الدائرة العظمى المارة بالنقطتين E وَ O تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة G وتقطع الفلكَ على النقطة I. القوس GI هي الميل الأقصى للفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، ويكون $\overset{\frown}{GI} = \overset{\frown}{EO}$.

النقطة C هي نقطة انقلاب؛ الدائرة العظمى ON التي هي دائرة الأقطاب تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة K؛ $\overset{\frown}{NC}$ هي ربع دائرة؛ $\overset{\frown}{KC}$ هي ميل فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار؛ لذلك فإن $\overset{\frown}{KN}$ معلومة.



الشكل ٩٥

ABC : فلك البروج وقطبه N ، ADC: الفلك المائل وقطبه E ، BHK : دائرة معدّل النهار وقطبها O

يكون معنا $\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{DN}} = \frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HK}} \cdot \frac{\sin \widehat{KC}}{\sin \widehat{CN}}$ القوسان $\widehat{BD}$ وَ $\widehat{DN}$ معلومتان، فتكون $\frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HK}}$ إذاً معلومة.

يكون معنا $\widehat{BK} = \widehat{BH} + \widehat{HK} =$ ربع دائرة، فيكون إذاً $\text{tg}\ \widehat{BH} = \frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HK}}$، فتكون $\widehat{BH}$ وَ $\widehat{HK}$ معلومتين.

النقطة H هي قطب الدائرة EOG، فإذاً $\widehat{HG}$ تساوي ربع دائرة، فتكون $\widehat{BG} = \widehat{HK}$ معلومة.

يكون معنا: $\frac{\sin \widehat{EI}}{\sin \widehat{IG}} = \frac{\sin \widehat{ED}}{\sin \widehat{DB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HG}}$؛ النسبتان الأخيرتان معلومتان، فتكون النسبة $\frac{\sin \widehat{EI}}{\sin \widehat{IG}}$ إذاً معلومة، وتساوي القوس $\widehat{EI}$ ربع دائرة، فتكون $\widehat{IG}$ معلومة، وهي الميل الأقصى للفلك المائل بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

ويكون أيضاً: $\frac{\sin \widehat{BN}}{\sin \widehat{ND}} = \frac{\sin \widehat{BK}}{\sin \widehat{HK}} \cdot \frac{\sin \widehat{HC}}{\sin \widehat{HD}}$، فتكون القوسان $\widehat{HC}$ وَ $\widehat{HD}$ إذاً معلومتين وتكون القوس $\widehat{HC}$ مساوية للقوس $\widehat{ID}$. وذلك أنـّه إذا رمزنا إلى مركز الكرة بـِ ω يكون معنا: $H\omega \perp \omega O$ وَ $H\omega \perp \omega E$، لأنَّ H هي نقطة تقاطع دائرة معدّل النهار مع الفلك ولأنَّ O وَ E هما قطبا هذين الفلكين. فيكون معنا إذاً: ωH عمودياً على مستوي $E\omega O$، فنستنتج أنَّ $H\omega \perp \omega I$؛ فالقوس $\widehat{HI}$ هي إذاً ربع دائرة مثل القوس CD. ويكون بالتالي $\widehat{HC} = \widehat{DI}$.

إنَّ الدائرة العظمى NI، من جهة أخرى، تقطع فلك البروج على النقطة S ويكون معنا:

$$\frac{\sin \widehat{SC}}{\sin \widehat{SB}} = \frac{\sin \widehat{CI}}{\sin \widehat{ID}} \cdot \frac{\sin \widehat{DN}}{\sin \widehat{NB}},$$

فتكون النسبة $\frac{\sin \widehat{SC}}{\sin \widehat{SB}}$ معلومة وتكون القوس $\widehat{BC}$ مساوية لربع دائرة؛ فالقوس $\widehat{SB}$ هي إذاً معلومة والنقطة S معلومة.

القضية ٢٣- درس ابن الهيثم في هذه القضية ميل الكوكبين السفليين: الزهرة وعطارد.

إنَّ ميل الفلك، بالنسبة إلى مستوي فلك البروج، متغيِّر لكلّ من هذين الكوكبين (انظر القضية ١٨، ص. ٢٠٥).

إذا كان موضعُ الطرف الجنوبي أو الطرف الشمالي للفلك بالنسبة إلى دائرة البروج معلوماً، يُمكِن عندئذ تحديد ميل الفلك بالنسبة إلى دائرة البروج بالطريقة التي أشرنا إليها بخصوص القمر.

وإذا كانت العقدتان، على الأخصّ، متطابقتين مع نقطتي الاعتدال، يكون الطرفان الشمالي والجنوبي للفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، المحدَّدان بالنسبة إلى فلك البروج، متطابقين مع نقطتي الانقلاب. والنتائج المتعلّقة، في هذه الحالة، بالميول المنسوبة لدائرة معدّل النهار تُستنتَج من الميول المنسوبة إلى فلك البروج بالطريقة المشار إليها بخصوص القمر.

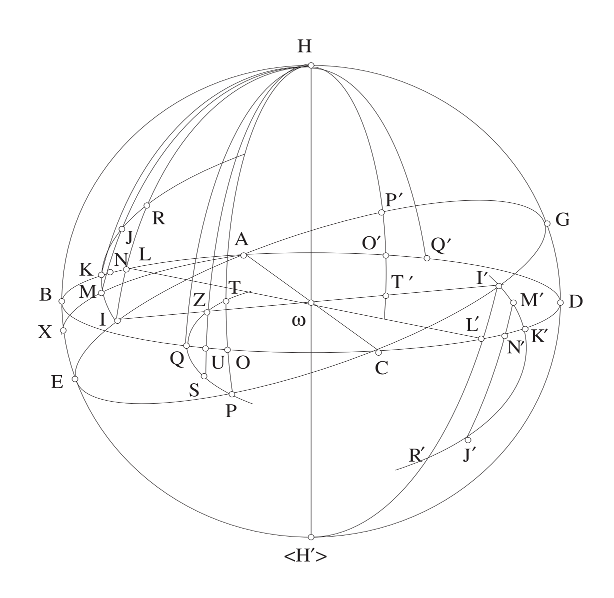
وإذا لم تكن العقدتان متطابقتين مع نقطتي الاعتدال، فإننا نَتبَّعُ نفس الطريقة التي أشرنا إليها (ص. ٢١٣-٢١٤) بخصوص القمر.

مسألة جديدة

إنَّ نقطتيْ التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدّل النهار تتحرَّكان حول المِحور المارّ بالعقدتين.

الفلك المائل يتحرَّك حول هذا المحور؛ كل نقطة من الفلك المائل ترسم إذاً قوساً من دائرة يكون قطباها العقدتين. كلُّ نقطة من الفلك تترافق مع نقطة على فلك البروج لها نفس الطول(هذا هو الموضع المنسوب إلى فلك البروج). يُعطي ابن الهيثم وصفاً مع كثير من التفاصيل لحركة هذه النقطة، مُستخدِماً على كل فلك الأقواس الأربع التي تساوي كل منها ربع دائرة والتي تفصل فيما بينها العقدتان والطرفان الشمالي والجنوبي المنسوبان إلى فلك البروج. وهو يأخذ بعين الاعتبار حركة البعد الأبعد على الفلك الخارج المركز.

البرهان: لتكن $ABCD$ دائرة البروج، وليكن $AECG$ فلك الزهرة أو فلك عطارد. إنَّ اتجاه توالي البروج هو اتجاه $DCBA$، والنقطة H هي القطب الشمالي لفلك البروج.



الشكل ٩٦

النقطتان A وَ C والنقطتان B وَ D وكذلك النقطتان E وَ G متقابلة قطرياً في هذا الشكل. والعقدتان هما A وَ C.

لتكن E الطرف الجنوبي لفلك الكوكب عطارد (لو كانت E الطرف الشمالي للزهرة، لتوجَّب أن نجعلَ H' القطبَ الشمالي لفلك البروج وأن نجعل H قطبَه الجنوبي).

أ) القوس $\widehat{EA}$ والقوس $\widehat{GC}$

لتكن I نقطة على القوس $\widehat{EA}$ ولتكن I' نقطة على القوس $\widehat{GC}$[٢٦] ؛ الدائرة العظمى HI تقطع القوس $\widehat{AB}$ على النقطة L، وتكون الزاوية $\widehat{ALI}$ قائمةً مع $\widehat{AL} > \widehat{AI}$. الدائرة ذات القطب A التي تمرُّ بالنقطة I تقطع القوسَ $\widehat{AB}$ على النقطة K بين B وَ L، وتقطع القوسَ $\widehat{HL}$ على النقطة R . كلٌّ من القوسين $\widehat{HB}$ وَ $\widehat{KH}$ تساوي ربع دائرة، لأنَّ H هي قطب الدائرة AKB؛ إنَّ قطبيْ كل من الدائرتين BH وَ KH موجودان إذاً على الدائرة AKB، كما أنَّ النقطة A هي قطب الدائرة IKR. إنَّ المستوي AKB هو إذاً مستوي تناظرٍ لكل من الدائرتين $H'KH$ وَ IKR اللتين لهما النقطة المشتركة K؛ فيكون الخط العمودي في النقطة K على المستوي ABC خطاً

[٢٦] إذا أخذنا النقطة I' على القوس GC، يُمكن أن نفترض أن النقطتين I وَ I' متقابلتان قطريّاً على الدائرة $AECG$ ؛ تقطع الدائرةُ العظمى HI، في هذه الحالة، فلكَ البروج على النقطة L من القوس AB، وعلى النقطة L' من القوس CD ، وتكون النقطتان L وَ L' متقابلتين قطرياً. وكذلك تكون أيضاً النقاط K وَ K' ، R وَ R' ، ... إلخ ، التي سنُعرِّفها فيما بعد.

مماساً مشتركاً في النقطة K لهاتين الدائرتين. النقطة K هي وسط القوس $\widehat{IKR}$ والنقطة L هي وسط القوس $\widehat{ILR}$.

لتكن M نقطة من القوس $\widehat{IK}$ ؛ الدائرة العظمى MH تقطع القوس $\widehat{KL}$ على النقطة N وتقطع القوس $\widehat{KR}$ على النقطة J. فيكون إذاً للنقطتين J وَ N نفسُ الطول الذي للنقطة M على فلك البروج، ويكون للنقطة I نفسُ طول النقطة L على فلك البروج.

إذا دار الفلك حول AC حتى ينطبقَ على فلك البروج، ترسم النقطة I القوس $\widehat{KMI}$، والنقطة على فلك البروج، التي لها نفس الطول، ترسم القوس $\widehat{KNL}$ باتجاه توالي البروج. وإذا تجاوز الفلك دائرة البروج وواصل دورانه حول AC، فإنَّ النقطة I ترسم القوس $\widehat{RJK}$ ، والنقطة التي لها نفس الطول على فلك البروج ترسم القوس $\widehat{LNK}$ من K نحو L، أي بالاتجاه المخالف لتوالي البروج.

القوس $\widehat{LR}$ مساوية للقوس $\widehat{IL}$ التي كانت الميل الأقصى للنقطة I جنوبَ فلك البروج؛ لذلك فإنَّ $\widehat{LR}$ هي الميل الأقصى شمال فلك البروج.

وإذا تابع الفلك المائل، بعد ذلك، دورانه ليعود إلى فلك البروج، فإنَّ النقطة I ترسم القوس $\widehat{KR}$ ، وموضعها المنسوب إلى فلك البروج يرسم القوس $\widehat{LNK}$ باتجاه توالي البروج.

وإذا تواصلت حركة الفلك المائل، فإنَّ النقطة I ترسم القوس $\widehat{IK}$، وموضعها المنسوب إلى فلك البروج يرسم القوس $\widehat{LK}$ بالاتجاه المخالف لتوالي البروج.

ولقد لخَّص ابن الهيثم بعد ذلك للنقطة I' من القوس $\widehat{GC}$ النتائجَ المُثْبَتة للنقطة I من القوس $\widehat{EA}$، وأدخل النقاط H'، K' وَ R' .

ب) القوس $\widehat{CE}$ والقوس $\widehat{AG}$

لتكن P نقطة على القوس $\widehat{CE}$ ، ولتكن P' نقطة على القوس $\widehat{GA}$ ؛ يُمكننا أن نفترض أنَّ P وَ P' متقابلتان قطرياً.

تقطع الدائرةُ العظمى HP دائرةَ البروج عمودياً على النقطة O، فيكون إذاً:

$\widehat{CO} < \widehat{CP}$ وَ ربع دائرة $< \widehat{AO} < \widehat{AP}$.

تقطع الدائرةُ ذات القطب C التي تمرُّ بالنقطة P دائرةَ البروج على النقطة Q وتقطع القوس $\widehat{OH}$ بين H وَ O على النقطة T. الدائرة العظمى HQ، العمودية على القوس $\widehat{BC}$ في

النقطة Q، هي مُماسَّة في النقطة Q للدائرة PQT. لنأخذ على القوس $\widehat{PQ}$ نقطة اختيارية هي S؛ الدائرة العظمى SH تقطع القوس $\widehat{OQ}$ على النقطة U وتقطع القوس $\widehat{TQ}$ على النقطة Z.

يستعيد ابن الهيثم هنا للنقطة P من القوس $\widehat{CE}$ ، الدراسةَ التي قام بها سابقاً للنقطة I من القوس $\widehat{AE}$ ، عندما يدور الفلك المائل حول CA ليمرَّ من الميل الجنوبي الأقصى إلى الميل المعدوم ثم من الميل المعدوم إلى الميل الشمالي الأقصى. وعندما ترسم النقطة P القوسَ $\widehat{PQ}$ ثم القوس $\widehat{TQ}$، يدرس ابن الهيثم تحرُّكَ نقطة فلك البروج التي لها نفس طول النقطة P وَالتي ترسم القوسَ $\widehat{OQ}$ بالاتجاه المخالف لتوالي البروج، ثم ترسم القوس $\widehat{OQ}$ باتجاه توالي البروج.

يدرس ابن الهيثم بعد ذلك عودة الفلك إلى موضعه الأوَّلي: النقطة P ترسم عندئذ بالتتابع القوس $\widehat{TQ}$ ثم القوس $\widehat{PQ}$.

وتجري بنفس الطريقة دراسةُ انتقال أيِّ نقطة، P'، من القوس $\widehat{AG}$.

الخلاصة: هكذا تكون الدراسة التي قمنا بها للنقطة I صالحة لكل نقطة من الفلك $AECG$. يقوم ابن الهيثم بهذه الدراسة مستخدِماً الدوائر الموازية لمعدِّل النهار ذات القطبين A وَ C.

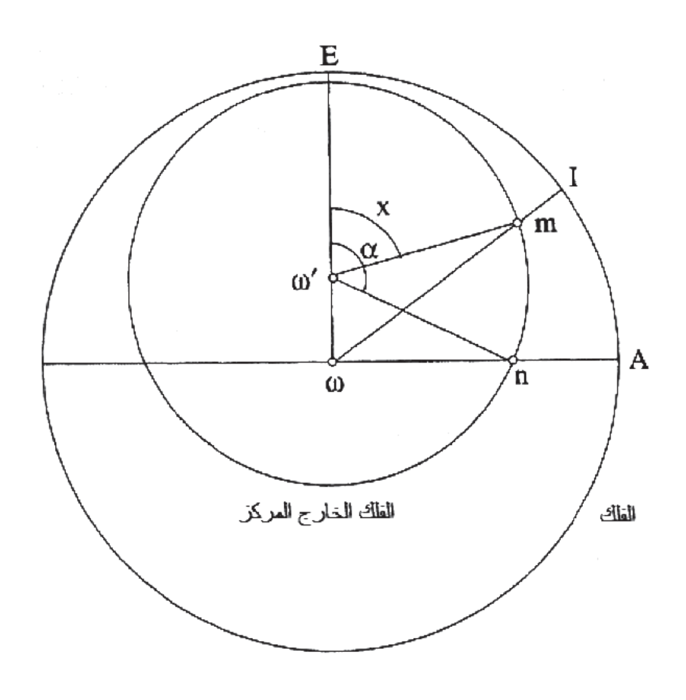
نأخذ بعين الاعتبار، لنقطة مثل النقطة I، حركتين: دورانَ I حول المحور المحدَّد بالعقدتين وتَحَرُّكَ موضع I المنسوب إلى فلك البروج، أي تَحَرُّكَ النقطة L.

- إنَّ القوسَ $\widehat{MI}$ التي ترسمها النقطة I في الدوران حول المحور AC، خلال زمن معلوم، معلومةٌ؛ وهذا ما يثبته ابن الهيثم بعد ذلك.

إنَّ الزمن الذي يستغرقه الفلك المائل، ليمرَّ من الميل الأقصى إلى الميل المعدوم، معلومٌ؛ وهو الزمن الذي يستغرقه مركز فلك التدوير ليجتاز على الفلك الخارج المركز قوساً، لِنُسَمِّها α، قابلةً لزاوية قائمة يكون رأسها مركز العالم ω، وتُقابل هذه القوس إذاً ربع دائرة على الفلك المائل. هذه القوس α معلومة؛ والقوس $\widehat{BE}$ الخاصّة بالميل الأقصى معلومة (انظر الشكل ٩٦). وخلال الزمن الذي يجتاز فيه مركز فلك التدوير على الفلك الخارج المركز

قوساً، هي x، انطلاقاً من البعد الأبعد، فإنَّ طرف الفلك يجتاز قسماً، هو $\widehat{EX}$، من القوس $\widehat{BE}$، ويكون معنا:

$$\frac{\widehat{EX}}{EB} = \frac{x}{\alpha}.$$



الشكل ٩٧

ω' : مركز الفلك الخارج المركز، ω : مركز الفلك، $\widehat{E\omega A}$ = زاوية قائمة، $x = \widehat{E\omega' m}$ ، $\alpha = \widehat{E\omega' n}$

إنَّ الحركة على الفلك الخارج المركز مستوية؛ إذا كان t_α الزمن الموافق للقوس α وكان t_x الزمن الموافق للقوس x، يكون معنا: $\frac{t_x}{t_\alpha} = \frac{x}{\alpha}$.

وإذا بلغت، من جهة أخرى، نقطةٌ مثل النقطة I النقطةَ M عندما تصل النقطة E إلى X، فإنَّ النقاط A، M وَ X تكون على دائرة عظمى، وتكون هذه الدائرة موضعاً من مواضع فلك الكوكب؛ ويكون معنا: $\frac{\widehat{IM}}{\widehat{IK}} = \frac{\widehat{EX}}{EB} = \frac{x}{\alpha} = \frac{t_x}{t_\alpha}$.

إذا كان الزمن t_x معلوماً (مع $t_x = 0$، عندما يكون $x = 0$)، تكون النقطتان X من القوس $\widehat{EB}$ وَ M من القوس $\widehat{IK}$ معلومتين. فتكون، بالتالي، الأقواسُ $\widehat{EX}$ ، $\widehat{XB}$، $\widehat{IM}$ وَ $\widehat{MK}$ معلومة.

وتكون معنا المعادلة $\widehat{AM} = \widehat{AI}$ بين قوسين معلومتين. والنقطة L على فلك البروج هي التي لها نفس طول النقطة I، وكذلك النقطة N على فلك البروج هي التي لها نفس طول النقطة M.

لنبرهن الآن أنَّ القوسَ التي ترسمها خلال زمن معلوم على فلك البروج النقطة L التي لها نفس طول النقطة I (موضع I)، تكون معلومة.

نأخذ من جديد الشكل السابق (الشكل ٩٦). الدائرة العظمى MA تقطع القوس $\widehat{BE}$ على النقطة X.

لتكن I نقطة على الفلك؛ القوس $\widehat{BE}$ هي ميل الفلك بالنسبة إلى فلك البروج.

لتكن I موضع النقطة المدروسة في لحظة معلومة؛ ولتكن m موضع مركز فلك التدوير في تلك اللحظة (الشكل ٩٧)، ولتكن x القوس التي تفصل m عن البعد الأبعد ؛ فتكون $x = \widehat{Em}$ معلومة.

إذا كانت m في البعد الأبعد ، يكون $x = 0$، فتكون القوسُ $\widehat{BE}$ الميلَ الأقصى i_m الذي هو معلوم.

إذا لم تكن m في البعد الأبعد ، تُحقِّق القوسُ $\widehat{XB} = i$ عندئذ: $\frac{i}{i_m} = \frac{\alpha - x}{\alpha}$، فتكون القوس $\widehat{XB} = i$ معلومة.

ترسم النقطةُ I، خلال زمن معلوم، القوسَ $\widehat{MI}$، ونقطة فلك البروج التي لها نفس طول النقطة I ترسم القوسَ $\widehat{NL}$.

ويُمكن أن نكتب في وصف النقطة L:

- $\frac{\sin \widehat{HB}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{HL}}{\sin \widehat{LI}} \cdot \frac{\sin \widehat{IA}}{\sin \widehat{AE}}$ (المثلث HIE والدائرة BLA).

الأقواس: $\widehat{HB}$، $\widehat{HL}$ وَ $\widehat{AE}$ هي أرباع دائرة، والقوسان $\widehat{BE}$ وَ $\widehat{IA}$ معلومتان، فتكون القوس $\widehat{LI}$ معلومة.

- يكون معنا أيضاً : $\frac{\sin \widehat{HE}}{\sin \widehat{EB}} = \frac{\sin \widehat{HI}}{\sin \widehat{IL}} \cdot \frac{\sin \widehat{AL}}{\sin \widehat{AB}}$ (المثلث LHB والدائرة EIA)

النسبتان الأولَيَان في هذه المعادلة معلومتان، فتكون النسبة الثالثة معلومة أيضاً؛ ولكن $\widehat{AL}+\widehat{LB}= \widehat{AB}$ = ربع دائرة، فتكون $\widehat{AL}$ معلومة. وتكون، إذاً، النقطة L التي لها نفس طول I معلومة.

ويُمكن أن نقوم بنفس الطريقة بوصف النقطة N :

- $\frac{\sin \widehat{HB}}{\sin \widehat{BX}}=\frac{\sin \widehat{HN}}{\sin \widehat{NM}}\cdot\frac{\sin \widehat{MA}}{\sin \widehat{AX}}$ ، فتكون القوس $\widehat{MN}$، إذاً، معلومة لأن كل الأقواس الأخرى معلومة.
- $\frac{\sin \widehat{HX}}{\sin \widehat{XB}}=\frac{\sin \widehat{HM}}{\sin \widehat{MN}}\cdot\frac{\sin \widehat{NA}}{\sin \widehat{AB}}$ ، القوس $\widehat{AN}$ هي إذاً معلومة؛ والنقطة N التي لها نفس طول النقطة M تكون، إذاً، معلومة.

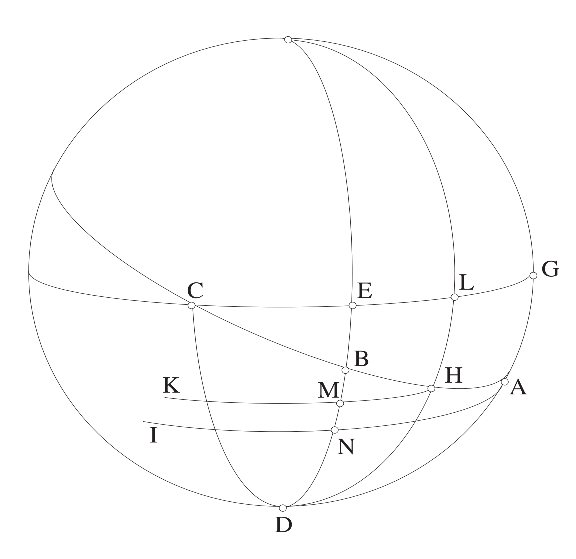
الخلاصة: إذا اجتازت نقطة ما، مثل النقطة I، القوسَ المعلومَ $\widehat{MI}$ من دائرة يكون قطباها العقدتين، خلال الزمن t_x، وإذا اجتازت I القوسَ المعلومَ $\widehat{KI}$ خلال الزمن t_α، فإنَّ كلَّ قوسٍ، من القوسين $\widehat{NL}$ وَ $\widehat{KL}$ من فلك البروج، مرسومةٍ بالنقطة التي لها نفس طول النقطة I خلال نفس الزمنين المذكورين، تكون أيضاً معلومة. وقد يكون اتجاه المسير على القوسين الأخيرتين مطابقاً لاتجاه توالي البروج أو مخالفاً له، كما رأينا ذلك عند دراسة أقواس الفلك المائل: $\widehat{AE}$ ، $\widehat{EC}$ ، $\widehat{CG}$ وَ $\widehat{GA}$.

القضية ٢٤- يدرس ابن الهيثم في هذه القضية حركة الكواكب المتحيِّرة على أفلاكها، كما يدرس الحد الأعلى لنسبة الزمن المحصَّل إلى ميل جزء الحركة الخاص بهذا الزمن المحصَّل.

إنَّ حركة الشمس على فلكها، من البعد الأبعد للفلك الخارج المركز نحو البعد الأقرب، مُتسارِعةٌ (وحركة مركز فلك التدوير على الفلك الخارج المركز مستوية). والسرعة الزاويَّة للراصد على الأرض تزايدية. ولكنَّ حركة الشمس على فلكها، من البعد الأقرب للفلك الخارج المركز نحو البعد الأبعد، مُتَباطِئة.

يُميِّز ابن الهيثم، في برهانه، بين أربع حالات لموضع الكوكب. ينقسم الفلك المائل إلى أربع أقواس بقطر التقاطع مع دائرة معدّل النهار وبالطرفيْن الشمالي والجنوبي للفلك المائل المنسوبين إلى دائرة معدّل النهار .

١) ليكن ABC الفلك المائل، ولتكن CEG دائرة معدّل النهار ذات القطب الشمالي D. لتكن A الطرف الشمالي (أو أية نقطة بين الطرف الشمالي والنقطة C). يكون الكوكب شمال دائرة معدّل النهار ويتحرَّك من A نحو B، فيكون ذلك إذاً من الشمال نحو الجنوب، ومن البعد الأبعد نحو البعد الأقرب، وفقاً للفرضيات.



الشكل ٩٨-١

الدوائر CEG، KMH وَ INA موازية لمعدِّل النهار والدوائر DC، DE ، DL وَ DG عمودية عليها، فنستنتج من ذلك أنَّ:

$$\widehat{EN} = \widehat{AG} = A \text{ ميل}،$$

$$\widehat{ME} = \widehat{HL} = H \text{ ميل}، \quad \widehat{BE} = B \text{ ميل}،$$

فيكون: $\widehat{NB} = \Delta(A, B)$ ؛ $\widehat{MB} = \Delta(H, B)$[٢٧]

الزمن $IA \equiv IA =$ مدَّة اجتياز $\widehat{AB}$

الزمن $KH \equiv KH =$ مدَّة اجتياز $\widehat{KH}$.

إنَّ الزمن المحصَّل للذهاب من H إلى B هو $\widehat{KM} = \widehat{MH} - \widehat{KH}$ (الشكل ٩٨-٢)[٢٨]، لأنَّ الكوكب المعنيَّ بالأمر خاضع للحركة اليومية.

[٢٧] ترمز Δ إلى الفرق بين ميلين بالنسبة إلى معدِّل النهار (انظر ص. ٨٥-٨٦).

[٢٨] إنَّ الكوكب يتحرَّك فعلاً من الموضع H إلى الموضع B على فلكه خلال الزمن المعلوم t ، مع $t = \widehat{KH}$. القوس $\widehat{KH}$ موجَّهة من K نحو H باتجاه الحركة اليومية. ولكن النقطتين H وَ B تخضعان للحركة اليومية. فتصل نقطتا الكرة السماوية H وَ B في نهاية الزمن t ، على التوالي، إلى النقطتين H_1 وَ B_1. ويكون معنا: $\widehat{KH} = t \cong \widehat{BB_1} \cong \widehat{HH_1}$ (معادلة بين قوسين متشابهتين). ويصل الكوكب من الوضع الأوَّلي H إلى الوضع النهائي B. والفرق بين الطالعين المستقيمين لهاتين النقطتين هو:
$\widehat{HM_1} = \delta(H, B_1) = \widehat{HH_1} - \widehat{H_1M_1}$ ؛ ولكن $\widehat{KH} = \widehat{HH_1}$ وَ $\widehat{HM} = \widehat{H_1M_1}$ ،

يُمثّل ابن الهيثم الأزمان بأقواس من دوائر زمانية؛ وسنرى، فيما بعد، أنَّ (IA) وَ(KH) يدخلان بواسطة نسبة أحدهما إلى الآخر، فلا يكون ضرورياً أنْ يكون موضعا النقطتين I وَ K معلومين. والاستدلال يفترض أنَّ الاتجاه من K نحو H أو من I نحو A هو اتجاه الحركة اليومية.

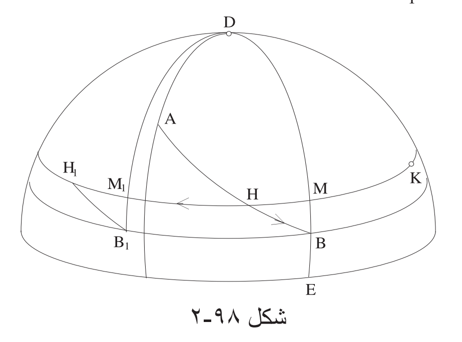
لقد أخذ ابن الهيثم حتى الآن حركة تبتدئ من دائرة معدّل النهار، وكان يقيس الزمن بقوس من دائرة عظمى. أما هنا، فإنَّ الحركة تبتدئ من نقطة ما على الكرة ويقاس الزمن المحصَّل بقوس من دائرة زمانية لهذه النقطة.

لنبرهن أنَّ $\frac{(KM)}{\overset{\frown}{MB}} > \frac{(IA)}{\overset{\frown}{NB}}$، حيث تُسمَّى القوس $\overset{\frown}{MB}$ التي هي جزء من القوس $\overset{\frown}{NB}$، "القوس الخاص" بالزمن (KM).

لتكن النقطة ω مركز الفلك ولتقطع أنصافُ الأقطار $A\omega$، $H\omega$ وَ $B\omega$ الفلكَ الخارج المركز بالتتابع على النقاط A_1، H_1 وَ B_1؛ فالزمنان (IA) وَ(KH)، اللذان هما زمنا المسير على القوسين $\overset{\frown}{BA}$ وَ $\overset{\frown}{HB}$ من الفلك، يكونان أيضاً زَمَنَي المسير للحركة الوسطى على قوسيْ الفلك الخارج المركز $\overset{\frown}{A_1B_1}$ وَ $\overset{\frown}{B_1H_1}$ فيكون إذاً $\frac{(IA)}{(KH)} = \frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{B_1H_1}}$، لأنَّ الحركة الوسطى مستوية.

ولكن، وفقاً للقضيتين ٨ وَ ٩: $\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{B_1H_1}} < \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BH}}$، فيكون $\frac{(IA)}{(KH)} < \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BH}}$ ؛ وكذلك يكون وفقاً للقضية ٦: $\frac{\overset{\frown}{AH}}{\overset{\frown}{HB}} < \frac{\overset{\frown}{NM}}{\overset{\frown}{MB}}$، فنستنتج أنَّ $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BH}} < \frac{\overset{\frown}{NB}}{\overset{\frown}{BM}}$. ويكون معنا إذاً:

فيكون إذاً: $\delta(H, B_1) = \overset{\frown}{HM} - \overset{\frown}{KH} = \overset{\frown}{KM} = \overset{\frown}{HM_1}$.



شكل ٩٨-٢

يُمثّل الزمن (KM) ، إذاً، الفرق بين الطالعين المستقيمين للوضعين الأوَّلي والنهائي للكوكب في حركته، خلال المدة (KH) ، وهذه الحركة ناتجة من الحركة اليومية ومن حركة الكوكب على فلكه. هذا هو تعريف الزمن المحصَّل الوارد في بداية القسم المكرَّس لعلم الفلك، من هذا المؤلَّف.

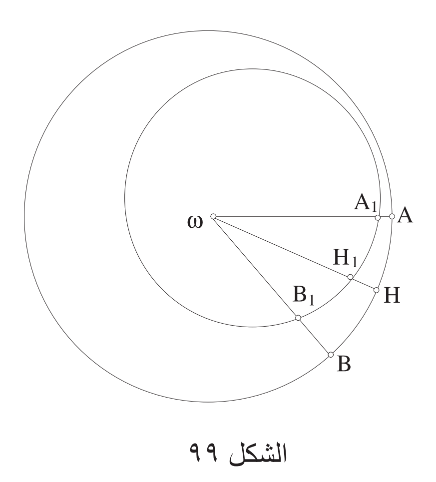
$\frac{(IA)}{(KH)} < \frac{\overset{\frown}{NB}}{\overset{\frown}{BM}}$.

إنَّ نسبة الزمن (IA) إلى الزمن (KH) تساوي نسبة قوس، من دائرة عظمى، مشابهة للقوس $\overset{\frown}{IA}$، إلى قوس من دائرة عظمى مشابهة للقوس $\overset{\frown}{KH}$ ، فنستنتج أنَّ:

$$\frac{(IA)}{\overset{\frown}{NB}} < \frac{(KH)}{\overset{\frown}{BM}} < \frac{(KM)}{\overset{\frown}{BM}}$$ [٢٩].

إنَّ هذه النتيجة صالحة لكل نقطة H من القوس $\overset{\frown}{AB}$، حيث نُرفق بالنقطة H الزمنَ المحصَّل $\overset{\frown}{KM}$ والقوس $\overset{\frown}{MB}$ التي هي فرق الميل الخاص بالزمن $\overset{\frown}{KM}$. يكون معنا:

$$\frac{(KM)}{\Delta(H,B)} > \frac{(IA)}{\Delta(A,B)}.$$



الشكل ٩٩

يُمكن أن نُفَسِّر هذه المتباينة كما يلي: السرعة الوسطى لتغيُّر الميل في الفسحة $\overset{\frown}{AB}$ هي أصغر من السرعة الوسطى لتغيُّر الميل في الفسحة الجزئية $\overset{\frown}{HB}$. وهذا يعني بتعبير آخر أنَّ حركة الكوكب مُتَسارعة على القوس المَعنية بالأمر.

لقد أدخل ابن الهيثم مفهوم السرعة الوسطى على فسحة منتهية ومتغيِّرة، بسبب غياب مفهوم السرعة الآنية.

والنتيجة المطلوبة، هنا، هي أنَّ سرعة تغيُّر الميل تبقى محدودة من أدنى بمقدار موجِبٍ.

[٢٩] انظر الحاشية السابقة.